УДК 004.4 doi: 10.26102/2310-6018/2019.24.1.042

Ю.С. Скворцов, Н.А. Рындин, К.А. Амоа

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО СЕВООБОРОТА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА С КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

*Воронежский государственный технический университет,
Воронеж, Россия*

Проблемой исследования является определение оптимального плана множественных периодов, которые учитывают экономику объекта исследования в динамической структуре. Вследствие чего, в данной статье описана динамическая модель, на основе уравнения Беллмана с конечным горизонтом. Объектом исследования является севооборот. Максимизируя чистую приведенную ожидаемую текущую и будущую прибыли модифицированное уравнение Беллмана дает оптимальные решения по посадке культур. Эта модель учитывает многолетние севообороты с различным набором культур. Уравнение Беллмана представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с начальными условиями, заданными для последнего момента времени, для функции Беллмана, которая выражает минимальное значение критерия оптимизации, которое может быть достигнуто, при условии эволюции системы из текущего состояния в некоторое конечное. С помощью пакета Matlab проведено моделирование севооборота с помощью средств динамического программирования. MATLAB использует набор инструментов CompEcon для решения задачи динамического программирования с дискретным временем или с дискретной переменной. Учитывая конечное значение текущей и ожидаемой прибыли, задача решается путем многократного применения уравнения Беллмана.

Ключевые слова: цепь Маркова, динамическое программирование, уравнение Беллмана, оптимизация севооборота, дискретное состояние.

Введение. Важную роль в развитии автоматизированного управления, экономики и производства играют системы поддержки принятия решений. Предприятия все больше интересует получение дополнительной прибыли. Для создания модели принятия решений была выбрана Марковская цепь с дискретным временем и дискретным состоянием. В процессе исследования цепь модифицировалась для моделирования процесса оптимизации севооборота. Особенностью модели является то, что результаты, полученные с помощью модели, зависят от лица принимающего решения.

Модели принятия решений, созданные агрономами, могут быть неправильно определены. Это происходит, когда не учитывается влияние севооборота на урожайность и прибыль в долгосрочной перспективе. Возникает интересный исследовательский вопрос: Наблюдая влияние севооборота, как максимизировать прибыль с помощью перераспределения площади, которая зависит от волатильности цен на урожай? Этот вопрос представляет интерес, потому что наблюдается рост волатильности цен на урожай в последние годы.

1. Материалы и методы. Экономический анализ схем севооборота играет главную роль в исследованиях о перераспределениях площади полей. Различные подходы, разработанные в последние десятилетия, широко расширили знания людей об экономическом моделировании севооборота. Однако из-за сложности систем севооборота, экономические модели имеют различные ограничения, которые затрудняют использовать модели на практике. В статье описывается динамическая оптимизация модели севооборота с общей структурой. Модель была разработана с минимальными агрономическими требованиями: тип почвы, уровень урожайности, предыдущие выращенные культуры. Модель адаптирована для любой системы севооборота с любыми внешними условиями. В ней также учитываются многолетние переносы культур. Модель дискретного решения Маркова анализируется с использованием методов динамического программирования, разработанных Ричардом Беллманом.

Уравнение Беллмана помогает оптимизировать последовательные решения, выравнивая текущую прибыль с ожидаемой будущей прибылью. С конечным горизонтом уравнение Беллмана записывается как [1]:

$$V_t(s) = max_{x \in X(S)}\{f(s,x) + \delta \sum_{s' \in S} P(s'|s,x)V_{t+1}(s'))\}, s \in S, t = 1,2 \dots, T \quad (1)$$

где $V_t(s)$ - максимально достижимая сумма текущих и ожидаемых будущей прибыли, учитывая, что система находится в состоянии s в период t, x - управляющая переменная. $f\,(s, x)$ - текущая прибыль,

$$\delta \sum_{s' \in S} P(s'|s,x)V_{t+1}(s')) \quad (2)$$

- ожидаемая будущая прибыль. Целевой функцией является максимизация суммы текущей и ожидаемой будущей доходности предприятия в течение T лет. Предполагается, что прибыль в текущем сезоне будет точно известна, как только будут известны решения о посадке в текущем сезоне. Поэтому объект исследования представляется конечным горизонтом.

Руководитель принимает решения, исходя из результатов прошлого сезона, поэтому мы берем урожайность в момент времени t-1 как переменную состояния в момент времени t. Относительно системы севооборота эта переменная состояния включает как выбор культуры, так и урожайность. Мы предполагаем, что уровень урожайности в течение прошлого сезона не влияет на уровень урожайности в этом сезоне, имеет значение только выбор культуры. Чтобы быть точным, фактическая переменная состояния в этой модели — это прибыль, в которую включены экзогенные входные и выходные цены. В общем виде переменная состояния имеет вид:

$$V_{t+1} \in \{\mathrm{y}, \mathrm{ym}\} \quad (3)$$

В севообороте смешанный выбор культуры и уровень урожайности являются нашей переменной состояния, где y обозначает урожайность у, а ym обозначает урожайность у при пониженной урожайности непрерывного посева. В системе с двумя переменными состояния, такими как AB, число элементов в пространстве состояний равно девяти, что включает в себя все возможные комбинации прибыли для переменных состояний A и B. Севооборот AM-BM указывает на то, что как A, так и B собирают с меньшей урожайностью из-за непрерывного посева культур, поэтому прошлогодние посевы, должны быть A и B. В то время как урожай A и B были посажены в течение двух последовательных сезонов, рационально поменять земли для A и B и получить урожай севооборота AB, а не продолжать посадку культур AM-BM. Следовательно, AM-BM не является возможным сценарием получения прибыли, поэтому:

$$y_{t-1} \in (\text{A-B, A-BM, AM-B, A-A, A-AM ,AM-AM, B-B, B-BM, BM-BM}) \quad (4)$$

Управляющая переменная имеет вид:

$$\mathrm{x} \in \{\mathrm{A,B,\ldots N}\} \quad (5)$$

где A, B,…, N обозначает альтернативные переменные состояний в системе [2]. На основании переменной состояния и управляющей переменной, обозначенной выше, модифицированное уравнение Беллмана можно записать в виде:

$$V_t\,(y_{t-1}) = max_{x\in X(\pi(y_{t-1}))}\{\pi(y_{t-1}, x) + \delta V_{t+1}\,(g(y_{t-1}, x))\}, y_{t-1} \in Y, t = 1,2 \ldots, \quad (6)$$

где $V_t\,(y_{t-1})$ - максимально достижимая сумма текущей и ожидаемой прибыли предприятия, учитывая, что система находится в состоянии y_{t-1}

в период t, x - выбор переменной состояния для текущего сезона, $\pi(y_{t-1}, x)$ - доход предприятия в текущем сезоне, а $g(y_{t-1}, x)$ - ожидаемый доход предприятия в будущем [3].

Функция перехода состояний $g(y_{t-1}, x)$ обозначает, как текущее состояние y_{t-1} меняется в пространстве состояний, основанном на выборе переменной состояния текущего сезона x. $g(y_{t-1}, x)$ в этой модели можно лучше понять, посмотрев на Рисунок 1.

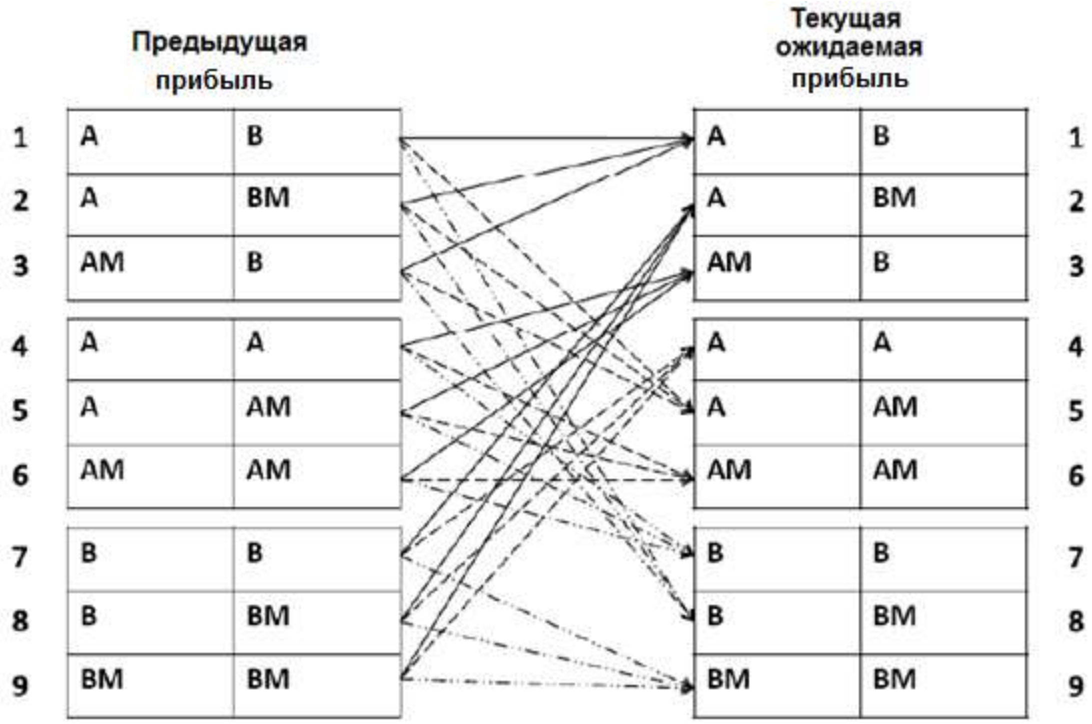

Рисунок 1 – Переходы функции А-В севооборота

На Рисунке показан вариант моделирования А-В процесса перехода состояния для этой модели. Левый столбец обозначает текущее состояние, которое является выбором переменной состояния и уровнем прибыли в течение последнего сезона. Предыдущий выбор культуры и уровень урожайности переходят в текущий уровень урожайности, зависимый от текущего решения о посадке. В начале сезона агроном анализирует посаженные культуры прошлого сезона и в результате принимает одно из трех решений: посадка А на двух участках, посадка В на двух участках или посадка А и В на обоих участков [4]. Функции прибыли имеет следующий вид:

Переменная состояния:

$$Y \in \{C|S, C|SM, CM|S, C|C, C|CM, CM|CM, S|S, S|SM, SM|SM\},$$
$$t \in \{1,2,3\ldots,n\} \tag{7}$$

где C – 1-ая переменная состояния; S – 2-ая переменная состояния; CM – сниженная прибыль 1-ой переменной состояния;

SM - сниженная прибыль – 2-ой переменной состояния; Pc – цена 1-ой переменной состояния, Ps – цена 2-ой переменной состояния;

Yc – прибыль 1-ой переменной состояния; Ys – прибыль 2-ой переменной состояния; Cc - стоимость производства 1-ой переменной состояния; Cs – стоимость производства 2-ой переменной состояния.

Переменная действия имеет вид:

x ∈ {объект моделирования, 1-ая переменной состояния, 2-ая переменная состояния }

$$f(y_{t-1}, x) = \begin{cases} (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_s, \\ if\ Y_{t-1} = (C|S, \text{или } C|SM, or\ CM|S) \\ and\ x = \text{объект моделилирования} \\ (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_{cm} \\ , if\ Y_{t-1} = (C|S, \text{или } C|SM, or\ CM|S) \\ and\ x = 1 - \text{ая переменная состояния} \\ (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_{sm}, \\ if\ Y_{t-1} = (C|S, \text{или } C|SM, or\ CM|S) \\ and\ x = 2 - \text{ая переменная состояния} \end{cases} \tag{8}$$

$$f(y_{t-1}, x) = \begin{cases} (P_c - C_c)Y_{cm} + (P_s - C_s)Y_s, \\ if\ Y_{t-1} = (C|C, \text{или } C|CM, or\ CM|CM) \\ and\ x = \text{объект моделилирования} \\ (P_c - C_c)Y_{cm} + (P_s - C_s)Y_{cm} \\ , if\ Y_{t-1} = (C|C, \text{или } C|CM, or\ CM|CM) \\ and\ x = 1 - \text{ая переменная состояния} \\ (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_s, \\ if\ Y_{t-1} = (C|C, \text{или } C|CM, or\ CM|CM) \\ and\ x = 2 - \text{ая переменная состояния} \end{cases} \tag{9}$$

$$f(y_{t-1},x) = \begin{cases} (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_{sm}, \\ if\ Y_{t-1} = (S|S, \text{или } S|SM, or\ SM|SM) \\ and\ x = \text{объект моделилирования} \\ (P_c - C_c)Y_c + (P_s - C_s)Y_c \\ ,if\ Y_{t-1} = (S|S, \text{или } S|SM, or\ SM|SM) \\ and\ x = 1 - \text{ая переменная состояния} \\ (P_c - C_c)Y_{sm} + (P_s - C_s)Y_{sm}, \\ if\ Y_{t-1} = (S|S, \text{или } S|SM, or\ SM|SM) \\ and\ x = 2 - \text{ая переменная состояния} \end{cases} \quad (10)$$

2. Моделирование севооборота. В этом исследовании модель решения Маркова с дискретным временем и дискретным состоянием адаптируется для моделирования процесса оптимизации севооборота. Исходная модель решений Маркова имеет следующую структуру: в каждом периоде t лицо наблюдает экономическое состояние st, совершает действие xt и получает прибыль $f\ (st, xt)$, которое зависит как от состояния системы, так и от действия. Этот процесс может быть подстроен для севооборота следующим образом. В начале сезона посадки производитель наблюдает за посевами, посаженными в течение прошлого сезона, и решает, какие посевы сажать на той же земле в текущем сезоне. Агрономы принимают решения, предполагая, что на каждом участке можно выращивать только один тип культур. Ожидаемая урожайность зависит как от предыдущего результата посадки, так и от текущего решения о посадке.

Например, если кукуруза и соевые бобы были посажены на двух равных по размеру полях в течение прошлого сезона, агроном решает следить за севооборотом кукурузы и сои, меняя местами культуры, посаженные на двух участках, после чего ожидаемый урожай кукурузы может быть сохранен на первоначальном уровне. Однако если агроном решит посадить кукурузу на обоих участках из-за роста цены на кукурузу, один из ожидаемых урожаев кукурузы будет снижен из-за непрерывной посадки культуры на одном и том же участке (Рисунок 2).

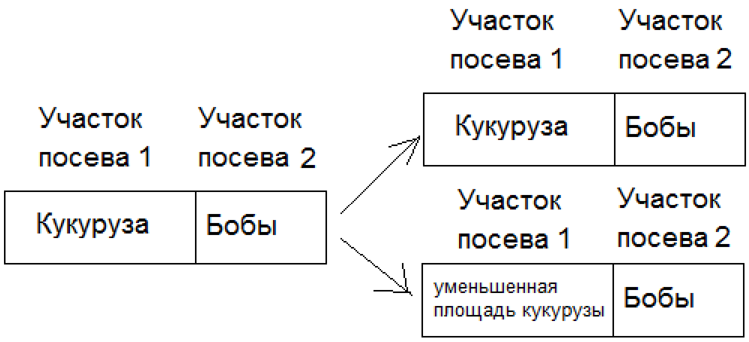

Рисунок 2 – Две текущих сценария посадки, основанных на предыдущих посевах

Ожидаемые входные, выходные цены, ожидаемый урожай являются экзогенными переменными в модели. Уровень урожайности является эндогенной переменной. Рисунок 2 наглядно демонстрирует функцию перехода состояний для простейшего севооборота А-В. Предыдущий выбор культуры и уровень урожайности влияет на текущий уровень урожайности, зависящий от текущего решения о посадке.

В начале текущего сезона, агроном анализирует посевы, посаженные в течение прошлого сезона, делает выбор из трех вариантов по посадке: посадка А на обоих участках, посадка В на обоих участках или посадка А и В на обоих участках.

Уровень урожайности сельскохозяйственных культур в момент времени t зависит только от культуры, посаженной в момент времени t-1, и от решения о посадке в момент времени t. Это предположение не будет справедливо для некоторых культур, для которых уровень урожайности зависит от культур, посаженных в момент времени t-1 и времени t-2, так и от решения о посадке в момент времени t. Поэтому модель должна учитывать особенности двухлетнего севооборота.

Переменная состояния в расширенной модели зависит от выбора культуры и урожайности последних двух сезонах. Уровень урожайности остается непредсказуем для агрономов. Результаты уровня агрономической урожайности доступны во многих предыдущих исследованиях, их значения варьируются в зависимости от площади, культуры и других агрономических факторов.

MATLAB использовался для моделирования динамической модели севооборота, разработанной в этом исследовании. MATLAB использует набор инструментов CompEcon для решения задачи динамического программирования с дискретным временем / дискретной переменной. Учитывая конечное значение $Vt + 1\ (g\ (yt - 1, x))$, можно получить решение путем многократного применения уравнения Беллмана [6]. MATLAB сравнивает значение $Vt + 1\ (g\ (yt - 1,\ x))$ для каждого времени t и предоставляет оптимальное решение для каждого периода.

Значение для каждого $Vt + 1\ (g\ (yt - 1,\ x))$ включает текущую и будущую прибыль. Текущая прибыль за каждый период [7]:

$$\pi_{it(d)} = \sum_{i=1}^{N}(P_{it}Y_{it(d)} - Y_{it}) \tag{11}$$

Вышеуказанная функция прибыли представляет собой сумму прибыли для культур, посаженных в соответствии с принятым решением о посадке d. MATLAB сравнивает значения прибыли и выбирает один с наибольшим значением в качестве оптимального решения для периода t. Однако это будет верно только для последнего периода T, где неизвестна будущая прибыль. Для любого другого периода t MATLAB сравнивает три значения прибыли, каждое из которых влияет на формирование будущей прибыли, заданное значением уравнения Беллмана в период t.

3. Результаты. В результате исследования были получены следующие результаты:

- получено модифицированное уравнение Беллмана для объекта моделирования;
- проведено моделирование севооборота и показаны функции переходов для односезонной модели;
- сформулированы ограничения модели;
- описаны функции перехода состояний для простейшей системы;
- описаны особенности расширенной модели для двухлетнего севооборота.

Заключение. В этом исследовании была разработана динамическая модель севооборота, которая показывает, как меняется ожидаемая прибыль при перераспределении площади посадки культур. В частности, модифицированное уравнение Беллмана было использовано для динамической оптимизации, модель севооборота фактически является частью уравнения в виде переходной функции. Модель была разработана как для односезонных, так и для двухсезонных севооборотов. Результаты моделирования показывают, что при рассмотрении односезонных севооборотов оптимальным выбором является непрерывное выращивание культуры на участке поля. Для двухсезонных севооборотов оптимальным выбором является чередование культур при посадке. В итоге оказалось, что двухлетние севообороты более стабильны, и для агрономов предпочтительней использовать смешанную схему посева. Системам севооборотов свойственна сложность взаимосвязей. В частности, в этом моделировании игнорировались взаимодействия между урожайностью и использованием минеральных удобрений или средств защиты растений. Дальнейшие исследования могут улучшить эту модель, которая будет учитывать влияние минеральных удобрений. В модели не учитывались различия в типах почв и другие природные факторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семахин А. М., Баталов И. С. Динамическое программирование в решении задачи оптимального размещения электронных компонентов системы управления // Молодой ученый. — 2013. — №6. — С. 144-146.
2. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010. — 295 с.
3. Горбан, А. Н.; Горбан, Павел А.; Судья, Джордж. Энтропия: Макровский упорядоченный подход. Энтропия 12, №. 5 (2010), 1145—1193 с.
4. Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. Глава 15. Динамическое программирование // Алгоритмы: построение и анализ/ Под ред. И. В. Красикова. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
5. А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. Теория случайных процессов, - Физматлит, 2005.
6. Беллман Р. Э. , Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — 1969.
7. Беллман Р. Э. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — 1954 .

U.S. Skvortsov, N.A. Ryndin, K.A. Amoa

MODEL OF DYNAMIC CROP ROTATION ON THE BASIS OF THE BELLMAN EQUATION WITH FINAL HORIZON

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

The problem of the study is to determine the optimal plan for multiple periods, which take into account the economy of the object of study in a dynamic structure. As a result, this article describes a dynamic model based on the Bellman equation with a finite horizon. The object of the study is crop rotation. By maximizing the net present, expected current and future returns, the modified Bellman equation provides optimal crop planting solutions. This model takes into account perennial crop rotations with a different set of crops. The Bellman *equation is a partial differential equation with initial conditions given for the last time instant for the Bellman function, which expresses the minimum value of the optimization criterion that can be achieved, provided the system evolves from its current state to some final state. Using the Matlab package, a dynamic model of crop rotation was simulated. MATLAB uses the CompEcon toolkit for solving problems of dynamic programming with discrete time or with a discrete variable. Given the final value of the current and expected profits, the problem is solved by repeatedly applying the Bellman equation.*

Keywords: Markov model, dynamic programming, Bellman equation, crop rotation optimization.

REFERENCES

1. Semakhin AM, Batalov I. S. Dynamic programming in solving the problem of optimal placement of electronic components of a control system // Young Scientist. - 2013. - №6. - p. 144-146.
2. Kelbert M. Ya., Sukhov Yu. M. Probability and statistics in examples and problems. T. II: Markov chains as the starting point of the theory of random processes and their applications. - M .: MTSNMO, 2010. - 295 p.
3. Gorban, A. N .; Gorban, Pavel A .; Judge, George. Entropy: Makrovsky orderly approach. Entropy 12, no. 5 (2010), 1145-1193 p.
4. Kormen, T., Leiserson, Ch., Rivest, R., Stein, K. Chapter 15. Dynamic Programming // Algorithms: Construction and Analysis / Ed. I.V. Krasikova. - 2nd ed. - M .: Williams, 2005. - 1296 p.
5. A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev. Theory of random processes - Fizmatlit, 2005.
6. Bellman, R. E., Kalaba, R. Dynamic programming and modern control theory. - 1969.
7. Bellman, R.. The theory of the stability of solutions of differential equations. - 1954.