УДК 513.628

Е.Ю. Косякова

К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТСЕКОВ ДВУМЕРНЫХ ОБВОДОВ С ЗАРАНЕЕ ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ СОПРИКОСНОВЕНИЯ

Кубанский государственный технологический университет,
Краснодар, Россия

Аппарат нелинейных преобразований наиболее приемлем для конструирования поверхностей, отсеками которых аппроксимируются сложные технические поверхности. Он позволяет не только получать поверхности в виде непрерывного каркаса линий, выводить их уравнения, но и варьировать их параметрами, прогнозировать свойства, управлять формой моделируемой поверхности. Свойства конструируемых поверхностей, полученных посредством алгебраических преобразований, определяются их плоскостными моделями – взаимно однозначными соответствиями, свойства которых, в свою очередь, зависят от характеристик оригинала, взаимного положения в пространстве и используемого вида отображения на плоскость. В статье рассматриваются закономерности, связывающие свойства составных моделей двумерных обводов со свойствами и взаимным положением их оригиналов, требований, накладываемых на аппараты проецирования. Посредством стереографических проецирований двух пересекающихся квадрик на плоскости проекций получены их модели в виде центральных преобразований с общим центром. Построение моделей отсеков поверхности при различных вариантах взаимного положения их оригиналов показало, что линии пересечения моделируется проекциями линий, соответственным одновременно в двух центральных преобразованиях с общим центром. При этом преобразования приобретают такие свойства, как совпадение некоторых пар принципиальных линий, соприкосновение их инвариатных кривых, появление общих слабоинвариантных линий. Исследование взаимного положения двух данных поверхностей на особенности и характеристики их моделей, получаемых по схеме метода двух изображений, является необходимым этапом для разработки алгоритмов моделирования поверхностей в виде двумерных обводов различных порядков гладкости. Материалы статьи представляют практическую ценность специалистам, занимающимся проектированием сложных криволинейных форм.

Ключевые слова: стереографическое проецирование, нелинейные преобразования, центр преобразования, инвариантная кривая, фундаментальная система, образ, коника, квадрика.

Введение. Теоретические аспекты моделирования рациональных поверхностей связаны с проблемой построения их моделей в виде взаимно однозначных соответствий. Решение этой проблемы включает в себя ряд взаимосвязанных задач:

- определение множества поверхностей, которые могут моделироваться в указанном смысле;
- поиск всевозможных аппаратов проецирования;

- установление взаимного положения тех или иных аппаратов проецирования и подмножеств моделируемых поверхностей и их основных характеристик (порядок, наличие особых точек и линий, существование каркасов линий с определенными характеристиками и т.п.);
- исследование взаимосвязи характеристик моделируемой поверхности, аппаратов проецирования и модели;
- условия получения инволюционных моделей (преобразований цикла 2) и моделей в виде преобразований высших циклов.

В ряде работ [1,2] были рассмотрены проблемы моделирования одной поверхности. В научных публикациях [3,4] обсуждались вопросы, связанные с моделированием двух и более поверхностей, что необходимо для разработки теоретических основ практических методов конструирования гладких двумерных обводов.

Материалы и методы. Проектирование, расчет и воспроизведение сложных технических поверхностей требует разработки корректных математических моделей, использующих тот или иной способ конструирования. Аппарат нелинейных преобразований наиболее приемлем для моделирования поверхностей, отсеками которых аппроксимируются сложные технические формы.

Представление поверхностей на чертеже в виде взаимно однозначных соответствий имеет несомненные преимущества по сравнению с заданием их линейных или сетчатых каркасов. Это преимущество заключается в возможности исследовании свойств моделируемой поверхности в целом за счет получения не дискретного каркаса поверхности, а ее непрерывной модели, а также с возможностью упрощения вычислений.

Алгебраическая поверхность Σ^n n–го порядка моделируется на плоскости π центральным бирациональным преобразованием T^n n–го порядка, если центры S', S'' проецирования являются $(n\text{-}1)$–кратными точками моделируемой поверхности [1]. Прямая $S'S''$ *является* $(n\text{-}2)$–кратной на поверхности Σ^n. Плоскость γ_i пучка $(S'\ S'')$ пересекает поверхность Σ^n по кривым второго порядка, инцидентным точкам S', S''. Среди этих кривых присутствуют $(2n\text{-}2)$ коник, распавшихся на пары прямых. Точка $F= (S'\ S'') \cap \pi$ является центром преобразования, следовательно, $(n\text{-}1)$–кратной F–точкой полей π', π''. Среди приводимых $(2n\text{-}2)$ коник поверхности Σ^n на π являются простыми F- точками преобразования T_n.

Для решения ряда прикладных задач представляет интерес рассмотрение вопросов построения моделей двух поверхностей. При получении модели двух квадрик на вспомогательные плоскости проекций, совмещенные с плоскостью изображения, посредством одного аппарата проецирования, необходимо выяснить как влияет аппарат отображения, взаимное расположение оригиналов на характеристики их плоскостных моделей – центральных кремоновых преобразований с общим центром. Кроме этого, следует добиваться, чтобы изображение было обратимым, что т.е. проекции точек A_i', A_i'', полученные на вспомогательных плоскостях проекций должны восстанавливать положение оригинала A в пространстве, что возможно в случае пересечения поверхности проецирующим лучом в единственной точке.

При получении модели двух поверхностей $\bar{\sum}^{n1}$, $\sum^{n2}$ центры S', S'' связок проецирующих прямых будут инцидентны общим вершинам данных бимоноидальных поверхностей $\bar{\sum}^{n1}$, $\sum^{n2}$ и должны принадлежать линии пересечения поверхностей.

Рассмотрим общий случай, когда поверхности Σ^{n1}, Φ^{n2} имеют в качестве своих общих кратных точек S', S'' и, следовательно, общую кратную прямую $S'S''$. Эти поверхности пересекаются по пространственному кривому порядку n_1 n_2, распавшейся на прямую $S'S''$, считаемую $(n_1$-$2)$ $(n_2$-$2)$ раз, и кривую m порядок которой равен $2(n_1+n_2-2) = n_1 n_2 - (n_1-2)(n_2-2)$.

Точки S', S'' на кривой m являются (n_1+n_2-3)- кратными, так как с произвольной плоскостью γ_i пучка $(S'\ S'')$ она пересекается лишь в двух свободных точках M, N пересечения кривых второго порядка $a_i^2 = \Sigma^{n1} \cap \gamma_i$, $b_i^2 = \Phi^{n2} \cap \gamma_i$, отличных от S', S''. Поэтому оставшиеся $[2(n_1+n_2-2)-2]$ точки пересечения кривой m с плоскостью γ_i поровну приходятся на S', S'': $[2(n_1+n_2-2)-2]:2= n_1+n_2-3$.

Таким образом, кривая m из своих кратных точек S', S'' проецируются на плоскости проекций π', π'' в кривые m', m'' порядок которых равен $(n_1+n_2-1) = 2(n_1+n_2-2)- (n_1+n_2-3)$. Эти проекции имеют (n_1+n_2-3)- кратную точку $F= (S'\ S'') \cap \pi$. При этом проекция m' проходит через все $(2n_1-2)$ простые F-точки поля π' преобразования T_{n1} и все $(2n_2-2)$ простые F-точки поля π' преобразования T_{n2}. Аналогично проекция m'' инцидентна всем $(2n_1-2)$ и $(2n_2-2)$ простым F-точкам поля π'' преобразований T_{n1}, T_{n2}.

Кривые m', m'', будучи проекциями линии пересечения поверхностей Σ^{n1}, Φ^{n2}, исходя из схемы моделирования, должны быть соответственными в обоих преобразованиях T_{n1}, T_{n2}.

Некоторые пары пол поверхностей Σ^{n1}, Φ^{n2} могут не только пересекаться в точках S', S'', а касаться, т.е. иметь общую касательную плоскость τ, или соприкасаться, т.е. иметь кроме общей касательной плоскости τ также общий соприкасающийся параболоид.

Результаты. Из перечисленных возможных вариантов расположения двух поверхностей второго порядка, описанных в [4], рассмотрим несколько конкретных примеров.

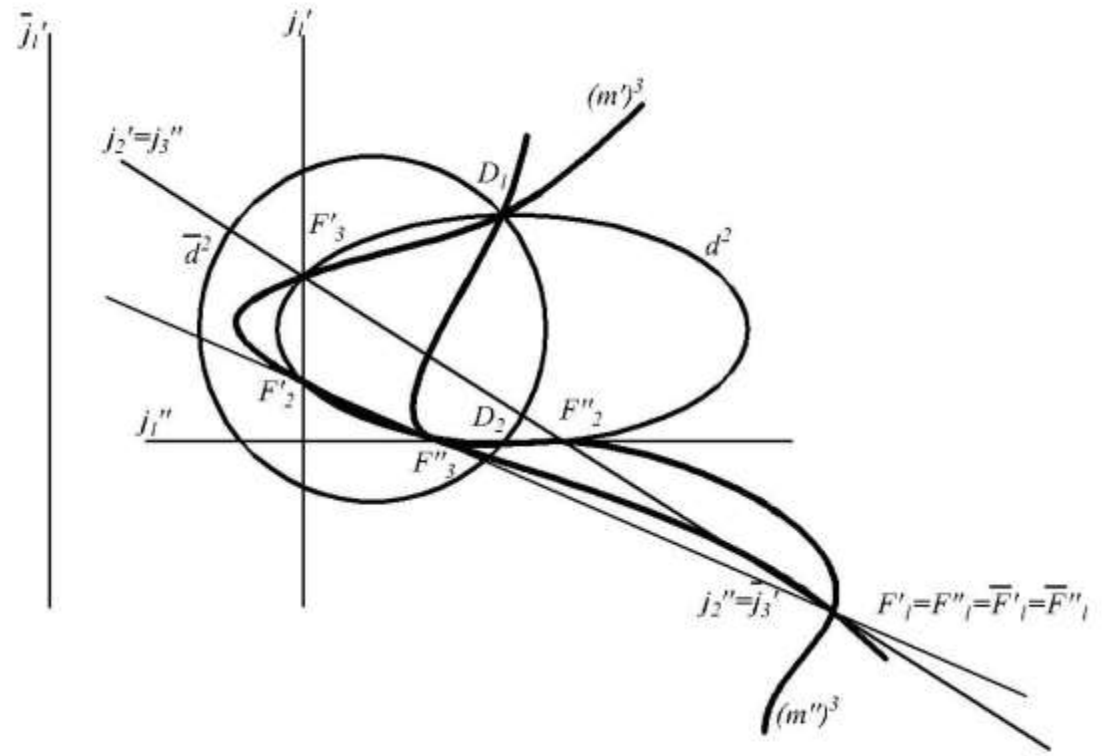

Рисунок 1 – моделирование линии пересечения двух квадрик (общий случай)

Две квадрики $\sum^2$, $\bar{\sum}^2$ в общем случае пересекаются по пространственной кривой a^4 четвертого порядка. Линия пересечения a^4 квадрик $\sum^2$, $\bar{\sum}^2$ на плоскости проекций $\pi'=\pi''$ *моделируется* двумя кривыми $(a')^3$, $(a'')^3$ третьего порядка, соответственными одновременно в обоих преобразованиях T_2, $\bar{T}_2$ (рисунок 1).

При трехточечном касании двух квадрик $\sum^2$, $\bar{\sum}^2$ *их* линия пересечения состоит из двух совпавших кривых второго порядка m ^{2} и $\bar{m}^2$. Центры проецирования *S', S” будем* считать инцидентными коникам m^2 и $\bar{m}^2$. В результате проецирования точек квадрик из S', S'' на плоскость $\pi(\pi'=\pi'')$ получим два квадратичных преобразования $I_2, \bar{I}_2$ с общим центром $F_1' = \bar{F}_1' = F_1'' = \bar{F}_1''$ и инвариантными кривыми d ^{2}, $\bar{d}^2$. При заданном аппарате проецирования линия касания m^2 и $\bar{m}^2$ данных квадрик отображается в прямую $m' = \bar{m}' = m'' = \bar{m}''$, являющуюся самосоответственной в обоих преобразованиях и инцидентную точкам касания $D, \bar{D}$ инвариантных кривых d^2, $\bar{d}^2$ и общему центру $F_1' = \bar{F}_1' = F_1'' = \bar{F}_1''$ преобразования (рисунок 2).

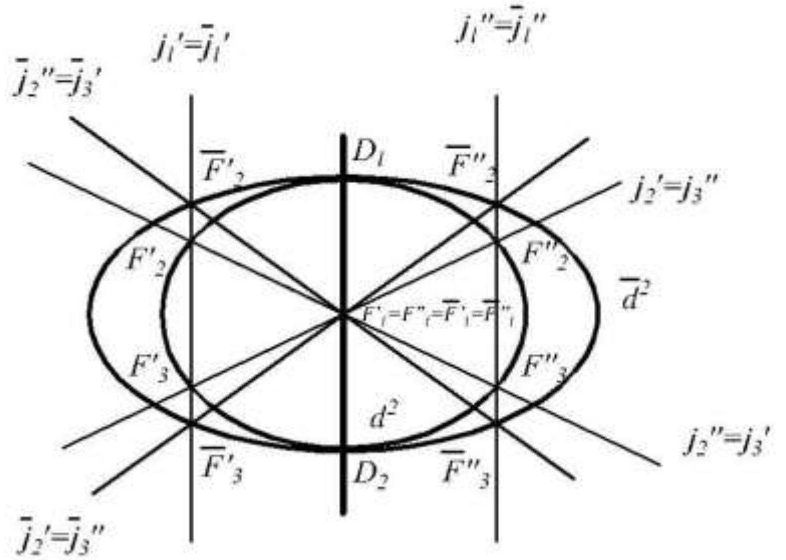

Рисунок 2 – моделирование линии пересечения двух квадрик (трехточечное касание)

При моделировании двух квадрик $\bar{\sum}^{2}$, $\sum^2$, имеющих двухточечное касание, двумя стереографическими проецированиями, центры S', S'' которых помещены в точки касания поверхностей, получим в качестве их плоских моделей два взаимно однозначных соответствия I_2 , $\bar{I}_2$ (рисунок 3).

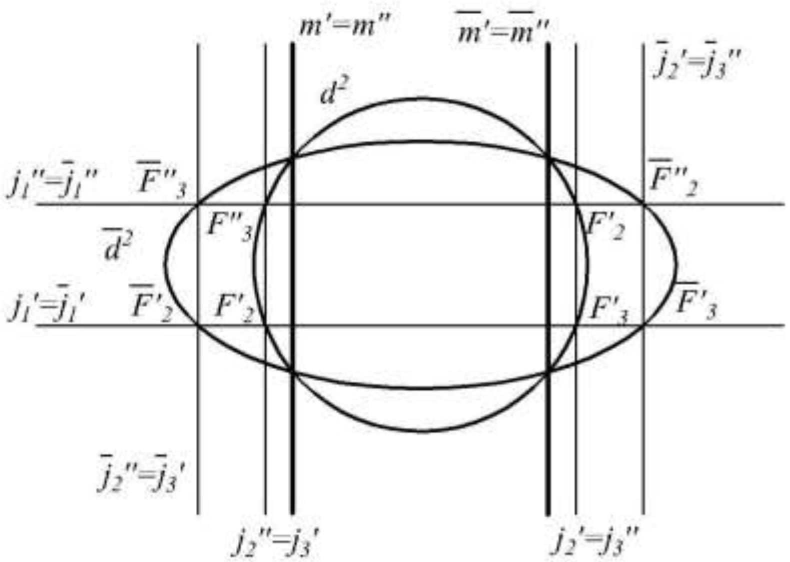

Рисунок 3 – моделирование линии пересечения двух квадрик (двухточечное касание)

Общий центр преобразований $I_2, \bar{I}_2$ будет находиться в несобственной точке F_1^{∞} и инцидентен паре совпавших прямых $m' = m''$, $\bar{m}' = \bar{m}''$, которыми моделируются распавшиеся на две кривые второго порядка m^2 и $\bar{m}^2$ линия пересечения двух квадрик $\bar{\sum}^2, \sum^2$.

При моделировании двух квадрик $\bar{\sum}^2$, $\sum^2$, имеющих одноточечное касание двумя связками прямых с центрами S', S'', расположенными в точке касания и в любой точке линии пересечения, линия их пересечения m^4 проецируется в кривую $(m')^2$ второго порядка и в кривую $(m'')^3$ третьего порядка. Рассматриваемые поверхности моделируются на плоскости проекций двумя центральными квадратичными преобразованиями T_2, $\bar{T}_2$ с общим центром $F_1' = F_1'' = \bar{F}_1' = \bar{F}_1''$ и инвариантными кривыми d^2, $\bar{d}^2$. Кривые $(m')^2$, $(m'')^3$ соответственны в преобразованиях T_2, $\bar{T}_2$ [4].

Обсуждение. Построение моделей двух квадрик при различных вариантах их взаимного положения показало, что линии пересечения моделируется проекциями линий, соответственным одновременно в двух центральных преобразованиях T_2 , $\bar{T}_2$ с общим центром. При этом преобразования T_2 , $\bar{T}_2$ приобретают такие свойства, как совпадение некоторых пар принципиальных линий, соприкосновение их инвариатных кривых, появление общих слабоинвариантных линий.

В более частных случаях взаимного положения поверхностей $\bar{\sum}^n$, $\sum^n$ линия их пересечения m может распадаться и включать в свой состав общие образующие поверхностей. Эти образующие могут совпасть в различных комбинациях, что ведет к соприкосновению различных порядков поверхностей $\bar{\sum}^n$, $\sum^n$ вдоль этих образующих. Очевидно, такие образующие на плоскости проекций $\pi(\pi' = \pi'')$ моделируются в виде общих самосоответственных прямых преобразований $\bar{T}_n$, T_n.

Заключение. Выявленные закономерности важны для решения обратной задачи моделирования поверхностей, когда заданием двух и более взаимосвязанных моделей, и определенного аппарата отображения требуется конструировать поверхности, имеющие наперед заданное взаимное положение (пересечение, касание, соприкосновение) [2]. Для конструирования отсеков сложной поверхности в виде двумерного массива точек или непрерывного каркаса линий необходимо на плоскости проекций задать несколько центральных преобразований, центры и инвариантные кривые которых должны иметь определенное положение в зависимости от желаемого порядка гладкости моделируемых двумерных обводов. Проецированием соответственных точек и линий составной модели - взаимно однозначных соответствий, на пространство получим конструируемую поверхность

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. М.: Машиностроение, 1987.192с.
2. Иванов Г.С. Прямая и обратная задачи моделирования поверхностей // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев: Будівельник,1990. Выпуск 50. С.17-21
3. Косякова Е.Ю. Моделирование взаимного положения двух квадрик на двухкартинном чертеже // Конструирование поверхностей и их технические приложения (Тематический сборник научных трудов МАИ). 1992. С.17-21
4. Косякова Е.Ю. Исследование влияния взаимного положения поверхностей на вид их моделей в задачах конструирования технических форм // Научные труды КубГТУ. 2017. №3. С.51-56

E.Y. Kosyakova

TO THE QUESTION OF MODELLING OF COMPARTMENTS OF TWO-DIMENSIONAL CONTOURS WITH IN ADVANCE SET CONTACT ORDER

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia

The using of nonlinear transformations which is used for designing of surfaces gives the chance to receive surfaces in the form of a continuous frame of lines, to derive their equations, to vary them parameters, to predict properties, to operate a form of the modelled surface. Properties of the designed surfaces are defined by their continuous models – the univocities set on the plane of projections which properties, in turn, depend on characteristics of the original, mutual position in space and the used projection device. The revealed regularities connecting properties of compound models with properties and the mutual provision of their originals of the requirements imposed on projection devices allow to predict the mutual provision of two and more surfaces already at a stage of a task of their models. The purpose of the offered research described in article is studying of influence of mutual provision of two surfaces of the second order on interrelation of properties and characteristics of their continuous models, it becomes clear as the line of their crossing and contact is modelled on the drawing. Studying of this interrelation presents important to a component in problems of modeling of the two-dimensional contours satisfying to a number beforehand of the set conditions of position, metric and differential character. By means of stereographic projections of two projections which are crossed surfaces of the second order on the plane models of compound surfaces in the form of the central transformations with the general center are received. Creation of models of two surfaces at various versions of their mutual provision showed what lines of crossing is modelled by projections of lines, corresponding at the same time in two central transformations with the general center. At the same time the transformations, gain such properties as coincidence of some couples of basic lines, contact their invariant of curves, etc. The research of mutual provision of two these surfaces on features and characteristics of their models received according to the scheme of a *method of two images is a necessary stage for development of algorithms of the solution of the return problem of modeling of surfaces. Materials of article are of practical value to the experts who are engaged in design of curvilinear shapes.*

Keywords: stereographic projection, Cremona transformations, center of transformation, invariant curve, fundamental system, conic, quadric.

REFERENCES

1. Ivanov G. S. Designing of technical surfaces. M.: Mechanical engineering ,1987.192p.
2. Ivanov G.S. Direct and return problems of modeling of surfaces//Applied geometry and engineering graphics. Kiev: Budivelnik, 1990. № 50. Pp.17-21
3. Kosyakova E.Y. Modeling of mutual provision of two квадрик on the two-picture drawing//Designing of surfaces and their technical applications (The thematic collection of scientific works of of Moscow Aviation Institute). 1992. Pp.17-21
4. Kosyakova E.Y. A research of influence of mutual provision of surfaces by sight their models in problems of designing of technical forms//Scientific works of Kuban State Technological University. 2017. №. 3. Pp. 51-56