УДК 519.977.5

Е.А. Андреева, В.М. Цирулева, Л.Г. Кожеко

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ РЫБНОЙ ЛОВЛИ

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

На современном этапе развития науки, техники и экономики большое внимание уделяется развитию математической теории оптимального управления, так как она сочетает в себе фундаментальные математические разработки с актуальными прикладными задачами. Одной из таких актуальных задач является сохранение и использование природных ресурсов [1]. Целью работы является построение математической модели управления процессом рыбной ловли и определение оптимального управления этим процессом. Модель учитывает фактор естественной рождаемости, смертности и другие параметры. С появлением новой информации модель усовершенствуется и дополняется новыми условиями, ограничениями на параметры задачи [2], [3], [4]. Управление процессом рыбной ловли осуществляется с помощью контроля за интенсивностью отлова. Целью управления является получение максимальной прибыли и сохранение популяции на заданном уровне [5], [6]. В работе рассмотрена непрерывная модель, учитывающая размер (вес) популяции, вследствие чего вся популяция рыбы разбивается на три возрастных класса, отличающихся друг от друга весом и размером. Кроме того, учитывается ограничение на рыночный спрос. Модель управления процессом рыбной ловли позволяет максимизировать прибыль от продажи улова и сохранить необходимый для дальнейшего развития уровень популяции. Для получения условий оптимальности в непрерывной модели используется Принцип максимума Понтрягина [5], [7], а в дискретной модели, аппроксимирующей непрерывную, – метод быстрого автоматического дифференцирования и численные методы решения экстремальных задач [5], [7].

Ключевые слова: оптимальное управление, рыбная ловля, возрастная популяция, математическая модель, положение равновесия, принцип максимума Понтрягина, дискретная задача оптимального управления.

ВВЕДЕНИЕ. Рассматриваемая в статье модель относится к классу моделей Лотки – Вольтерра типа "Хищник – Жертва" [6], [8]. В данной модели описывается процесс роста популяции рыб [9], состоящей из трех возрастных групп, каждая из которых характеризуется своим весом, размером, коэффициентами рождаемости и смертности. В зависимости от размера и веса выделяются классы отлавливаемой рыбы, причем отлов осуществляется только средневозрастной и взрослой рыбы. Цель отлова – максимизация прибыли и сохранение популяции на заданном уровне. В работе исследуются равновесные состояния динамической системы в зависимости от параметров задачи. С помощью методов оптимального управления и численных методов оптимизации найдено оптимальное управление процессом рыбной ловли, построен численный алгоритм определения оптимального решения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ РЫБНОЙ ЛОВЛИ. Рассмотрим математическую модель, описывающую изменение количества рыбы в трех классах: “молодой” (класс 1) $x_1(t)$, ”средней” (класс 2) $x_2(t)$ и ”взрослой” (класс 3) $x_3(t)$ на заданном отрезке времени [0,T].

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (1) – (3):

$$\dot{x}_1 = r\, x_3(1 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3) - \left(\mu_1 + \frac{1}{T_1}\right) x_1, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{T_1} - \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2}\right) x_2 - \alpha_2 x_2 u\,, \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{x_2}{T_3} - \mu_3 x_3 - \alpha_3 x_3 \tag{3}$$

с граничными условиями (4)

$$x_i(0) = x_i^0, \;\; x_i(T) = A_i > 0, \;\; i = 1,2,3. \tag{4}$$

Параметры α_2 , α_3 характеризуют размер ячеек рыболовецкой сети, $\alpha_2 , \alpha_3 \in [0,1]$; β_1, β_2 – соревновательные факторы, связанные с ограничением пищи и пространства для роста рыбы.

Параметр r > 0 – коэффициент рождаемости, μ_1, μ_2, μ_3 – смертность рыбы в первом, втором и третьем классах, T_1, T_2 – время взросления рыбы и перехода в следующий класс.

Скалярная функция u(t) характеризует усилие, прикладываемое для отлова рыбы, величины $\alpha_2 u x_2$, $\alpha_3 u x_3$ представляют собой количества рыбы второго и третьего классов, отлавливаемой в единицу времени.

На управление наложено естественное ограничение (5):

$$0 \le \mathrm{u}(t) \le u_0, \;\; \text{п.в. } t \in [0,T]. \tag{5}$$

Объем рыбы, выловленной на заданном отрезке времени, должен быть ограничен ее спросом на рынке потребления, то есть удовлетворять интегральному ограничению (6):

$$\int_0^T (\alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3\,)\, u\, dt \;\le B\,. \tag{6}$$

Требуется выбрать управление $u(t)$ таким образом, чтобы максимизировать прибыль рыболовецкой фирмы, которая определяется интегралом (7):

$$J(u) = \int_0^T e^{-\delta t}\, (\rho_2\, \alpha_2\; x_2 + \rho_3 \alpha_3 x_3 - 1)\, u\, dt \;\to max. \tag{7}$$

Здесь $\rho_1, \rho_2 > 0$ – стоимость рыбы второго и третьего классов соответственно, δ – дисконтирующий множитель, стоимость усилия в единицу времени принята равной единице.

Для системы дифференциальных уравнений (1) – (3), описывающих процесс рыбной ловли, считая величину управления u постоянной, найдем положение равновесия $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ из системы (8) – (9):

$$r\,x_3(1 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3) - \left(\mu_{\cdot 1} + \frac{1}{T_1}\right) x_1 = 0\,, \qquad (8)$$

$$\frac{x_1}{T_1} - \left(\mu_{\cdot 2} + \frac{1}{T_2}\right) x_2 - \alpha_2 x_2 u = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{x_2}{T_3} - \mu_3 x_3 - \alpha_3 x_3 u = 0. \qquad (10)$$

Получаем положение равновесия (11) – (13), зависящее от параметров задачи и от постоянного управления:

$$\bar{x}_1 = \frac{\left[r - \left(\mu_{\cdot 1} + \frac{1}{T_1}\right)\left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u)\right] T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u)}{r\left[\beta_1 \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_2 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_3\right]} \times$$

$$\times \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1\,, \qquad (11)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\left[r - \left(\mu_{\cdot 1} + \frac{1}{T_1}\right)\left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u)\right] T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u)}{r\left[\beta_1 \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_2 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_3\right]}, \qquad (12)$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\left[r - \left(\mu_{\cdot 1} + \frac{1}{T_1}\right)\left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u)\right]}{r\left[\beta_1 \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2} + \alpha_2 u\right) T_1 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_2 T_2 (\mu_3 + \alpha_3 u) + \beta_3\right]}. \qquad (13)$$

Полученные значения $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ выбираем в качестве начального состояния системы (1) – (3).

Исходя из физического смысла $(\bar{x}_1 > 0,\ \bar{x}_2 > 0,\ \bar{x}_3 > 0)$, необходимо получить связь между параметрами задачи, исследовать на устойчивость положение равновесия.

Применим метод штрафных функций к решению исходной задачи. Для учета интегрального ограничения, введем переменную (14)

$$x_0(t) = \int_0^t (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) u \, d\tau\,, \qquad (14)$$

тогда $\dot{x}_0(t) = (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\,u, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(T) \le B.$

Обозначим коэффициенты штрафа через A_i, $i = \overline{1,3}$ и N и используем квадратичные функции штрафа. Учитывая ограничения с помощью штрафных функций и заменяя знак $I(u)$ на противоположный, получаем выражение для функционала (15):

$$I(u) = -\int_0^T e^{-\delta t} (\rho_2 \alpha_2 x_2 + \rho_3 \alpha_3 x_3 - 1)\, u\, dt + M_1(x_1(T) - A_1)^2 +$$
$$+M_2(x_2(T) - A_2)^2 + M_3(x_3(T) - A_3)^2 + N(\max\{x_0(T) - B, 0\})^2 \to \min. \quad (15)$$

В дальнейшем будем использовать обозначения (16) – (19):

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = r\, x_3(1 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3) - \left(\mu_1 + \frac{1}{T_1}\right) x_1, \quad (16)$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{T_1} - \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2}\right) x_2, \quad (17)$$

$$f_3(x_2, x_3) = \frac{x_2}{T_2} - \mu_3 x_3, \quad (18)$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_0) = (M_1(x_1 - A_1)^2 + M_2(x_2 - A_2)^2 + M_3(x_3 - A_3)^2 +$$
$$+N(\max\{x_0 - B, 0\})^2. \quad (19)$$

Запишем функцию Понтрягина для данной задачи (20):

$$H(\lambda_0, t, x_1, x_2, x_3, u, p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_0(t)) =$$
$$= \lambda_0 e^{-\delta t}(\rho_2 \alpha_2 x_2 + \rho_3 \alpha_3 x_3 - 1)u + p_1(t) f_1(x_1, x_2, x_3) +$$
$$+p_2(t)(f_2(x_1, x_2) - \alpha_2 x_2 u) + p_3(t)(f_3(x_2, x_3) - \alpha_3 x_3 u) +$$
$$+p_0(t)(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)u. \quad (20)$$

Преобразуя выражение (20), запишем функцию Понтрягина в виде (21)

$$H(\lambda_0, t, x_1, x_2, x_3, u, p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_0(t)) =$$
$$= p_1(t) f_1(x_1, x_2, x_3) + p_2(t) f_2(x_1, x_2) + p_{3(t)} f_3(x_2, x_3) +$$
$$+(\lambda_0 e^{-\delta t}(\rho_2 \alpha_2 x_2 + \rho_3 \alpha_3 x_3 - 1) - p_2(t)\alpha_2 x_2 - p_3(t)\alpha_3 x_3 +$$
$$+p_0(t)(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3))u. \quad (21)$$

Введем функцию переключения (22):

$$\varphi(t) = \lambda_0 e^{-\delta t}(\rho_2 \alpha_2 x_2 + \rho_3 \alpha_3 x_3 - 1) - p_2 \alpha_2 x_2 - p_3 \alpha_3 x_3 +$$
$$+ p_0(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3). \quad (22)$$

Тогда функция Понтрягина перепишется в виде (23):

$$H(\lambda_0, t, x_1, x_2, x_3, u, p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_0(t)) = p_1(t) f_1(x_1, x_2, x_3) +$$
$$+p_2(t) f_2(x_1, x_2) + p_3(t) f_3(x_2, x_3) + \varphi(t)u. \quad (23)$$

Согласно Принципу максимума Понтрягина [4], [6], оптимальное управление удовлетворяет условию максимума (24):

$$H(\lambda_0, t, \bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t), \bar{u}(t), \bar{p}_1(t), \bar{p}_2(t), \bar{p}_3(t), \bar{p}_0(t)) =$$
$$= \max_{u \in U} H(\lambda_0, t, \bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t), u, \bar{p}_1(t), \bar{p}_2(t), \bar{p}_3(t), \bar{p}_0(t)). \quad (24)$$

Утверждение. Пусть $([\bar{x}], [\bar{u}])$ – оптимальный процесс в задаче. Тогда оптимальное управление имеет вид (25)

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } \varphi(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(t) < 0, \quad t \in [0, T], \\ \gamma \in [0, u_0], & \text{если } \varphi(t) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

а сопряженные функции удовлетворяют сопряженной системе (26) – (29):

$$\dot{p}_1 = -p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{p_2}{T_1}, \qquad (26)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + p_2 \left(\mu_2 + \frac{1}{T_2}\right) - \frac{p_3}{T_2} + \left(-\lambda_0 e^{-\delta t} - p_0 + p_2\right)\alpha_2 \bar{u}(t), \qquad (27)$$

$$\dot{p}_3 = -p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + p_3\mu_3 + \left(-\lambda_0 e^{-\delta t} - p_0 + p_3\right)\alpha_3 \bar{u}(t), \qquad (28)$$

$$\dot{p}_0 = 0 \qquad (29)$$

с условиями трансверсальности (30) – (31) на правом конце отрезка :

$$p_i(T) = -2M_i(x_i(T) - A_i), \quad i = \overline{1,3}, \qquad (30)$$

$$p_0(T) = -2N\max\{x_0(T) - B, 0\}. \qquad (31)$$

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА. В численных процедурах решения задач оптимального управления используются конечно разностные аппроксимации функций, производных, интегралов и других операторов. В результате непрерывная задача оптимального управления аппроксимируется дискретной задачей оптимального управления, которая по своим свойствам является задачей нелинейного программирования [5], [7], [10].

Построим дискретную задачу, аппроксимирующую исходную непрерывную задачу оптимального управления (32) – (38), в которой производные заменяются по схеме Эйлера, а интеграл – по правилу левых прямоугольников с шагом дискретизации $\Delta t = \frac{T}{q}$, где q – число точек разбиения отрезка [0,T].

$$I([x],[u]) = -\sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta t_i}\left(\rho_2 x_2^i \alpha_2 + \rho_3 x_3^i \alpha_3\right) u^i \,\Delta t_i + \sum_{j=1}^{3} M_j (x_j^q - A_j)^2 +$$
$$+ N\left(\max\{x_0^q - B, 0\}\right)^2 \to inf\,. \qquad (32)$$

В задаче переход из i-го состояния в (i+1)-ое осуществляется по правилу (33) – (36):

$$x_1^{i+1} = x_1^i + \Delta t_i\, f_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right), \qquad (33)$$

$$x_2^{i+1} = x_2^i + \Delta t_i\, \left(f_2\left(x_1^i, x_2^i\right) - \alpha_2\, x_2^i u^i\right), \qquad (34)$$

$$x_3^{i+1} = x_3^i + \Delta t_i\, \left(f_3\left(x_2^i, x_3^i\right) - \alpha_3\, x_3^i u^i\right), \qquad (35)$$

$$x_0^{i+1} = x_0^i + \Delta t_i\, \left(\alpha_2 x_2^i + \alpha_3 x_3^i\right) u^i \qquad (36)$$

с начальными условиями (37):

$$x_j^0 = a_j, \quad j = \overline{1,3}, \quad x_0^0 = 0, \qquad (37)$$

и ограничениями на управление (38):

$$0 \le u^i \le u_0, \quad i = \overline{0, q-1}. \qquad (38)$$

Правила перехода (33) – (36), начальные условия (37) и ограничения на управление (38) в совокупности задают условия допустимости.

Для построения решения дискретной задачи оптимального управления используется метод быстрого автоматического дифференцирования [7]. Построим функцию Лагранжа (39) для дискретной задачи оптимального управления (32) – (38):

$$L(\lambda_0, x_1, x_2, x_3, x_0, p, u) = -\lambda_0 \sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta t_i}\left(\rho_2 x_2^i \alpha_2 + \rho_3 x_3^i \alpha_3\right) u^i \,\Delta t +$$
$$+ M_1 (x_1^q - A_1)^2 + M_2 (x_2^q - A_2)^2 +$$
$$+ M_3 (x_3^q - A_3)^2 + N\,(\max\{x_0^q - B, 0\})^2 +$$
$$+ \sum_{i=0}^{q-1} p_1^{i+1}[x_1^{i+1} - x_1^i - \Delta t\, f_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{q-1} p_2^{i+1}[x_2^{i+1} - x_2^i - \Delta t\,(f_2\left(x_1^i, x_2^i\right) - \alpha_2\, x_2^i u^i)] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{q-1} p_3^{i+1}[x_3^{i+1} - x_3^i - \Delta t(f_3\left(x_2^i, x_3^i\right) - \alpha_3\, x_3^i u^i)] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{q-1} p_0^{i+1}\left[x_0^{i+1} - x_0^i - \Delta t\left(\alpha_2 x_2^i + \alpha_3 x_3^i\right) u^i\right] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{q-1} \sigma_i u^i + \sum_{i=0}^{q-1} \psi_i (u_0 - u^i)\,. \qquad (39)$$

Условия стационарности функции Лагранжа запишутся в виде (40) – (45):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^i} = p_1^i - p_1^{i+1} - \Delta t\left(p_1^{i+1}\frac{\partial f_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)}{\partial x_1^i} + p_2^{i+1}\frac{\partial f_2\left(x_1^i, x_2^i\right)}{\partial x_1^i}\right) = 0, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^i} = p_2^i - p_2^{i+1} - \Delta t\left(\lambda_0\, e^{-\delta t_i}\rho_2\alpha_2 u^i + p_1^{i+1}\frac{\partial f_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)}{\partial x_2^i}\right) -$$
$$-\Delta t\left(p_2^{i+1}\frac{\partial f_2\left(x_1^i, x_2^i\right)}{\partial x_2^i} - p_2^{i+1}\alpha_2 u^i + p_3^{i+1}\frac{\partial f_3\left(x_2^i, x_3^i\right)}{\partial x_2^i} + p_0^{i+1}\alpha_2 u^i\right) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3^i} = p_3^i - p_3^{i+1} - \Delta t\left(\lambda_0\, e^{-\delta t_i}\rho_3\alpha_3 u^i + p_1^{i+1}\frac{\partial f_1\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)}{\partial x_3^i}\right) -$$
$$-\Delta t\left(p_3^{i+1}\frac{\partial f_3\left(x_2^i, x_3^i\right)}{\partial x_3^i} - p_3^{i+1}\alpha_3 u^i + p_0^{i+1}\alpha_3 u^i\right) = 0, \qquad (42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0^i} = p_0^i - p_0^{i+1} = 0, \qquad (43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^q} = 2M_i\left(x_i^q - A_i\right) + P_i^q = 0, \quad i = \overline{1,3}, \qquad (44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \Delta t\left(\lambda_0\, e^{-\delta t_i}\left(\rho_2\alpha_2 x_2^i + \rho_3\alpha_3 x_3^i - 1\right) - p_2^{i+1}\alpha_2 x_2^i\right) -$$
$$-\Delta t\left(-p_3^{i+1}\alpha_3 x_3^i - p_0^{i+1}\left(\alpha_2 x_2^i + \alpha_3 x_3^i\right)\right) - \sigma_i + \psi_i = 0. \qquad (45)$$

Условия дополняющей нежесткости имеют вид (46):

$$\sigma_i u^i = 0, \quad \psi_i\left(u_0 - u^i\right) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}. \qquad (46)$$

Условия не отрицательности и согласования знаков запишутся в виде (47) – (48):

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \psi_i \geq 0, \quad \sigma_i \geq 0, \quad i = \overline{0, q-1}, \qquad (47)$$

$$\lambda_0^2 + \sum_{i=0}^{q-1}\left(\left(p_1^{i+1}\right)^2 + \left(p_2^{i+1}\right)^2 + \left(p_3^{i+1}\right)^2 + \left(p_0^{i+1}\right)^2 + \sigma_i + \psi_i\right) \neq 0. \qquad (48)$$

Кроме этого должны выполняться условия допустимости решения.

Рассматриваются два случая: регулярный $(\lambda_0 = 1)$ и нерегулярный $(\lambda_0 = 0)$. Легко проверить, что в данной задаче нерегулярных решений нет.

При численной реализации метода быстрого автоматического дифференцирования ограничения на управления не вводятся в функцию Лагранжа, а учитываются с помощью метода проекции градиента [5], [7].

Из условий стационарности в соответствии с граничными условиями получаем рекуррентные формулы для определения сопряженных векторов, соотношения для вычисления векторов управлений и векторов состояний на каждом шаге. После этого вычисляются значения функционала в зависимости от значений параметров задачи.

Достоверность результатов базируется на применении теоретически обоснованных методов теории оптимального управления и методов оптимизации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В статье построена и проанализирована математическая модель процесса рыбной ловли с одномерным управлением. В дальнейшем предполагается рассмотреть математическую модель, описывающую изменение количества рыбы в трех классах: “молодой” (класс 1) $x_1(t)$, ”средней” (класс 2) $x_2(t)$ и ”взрослой” (класс 3) $x_3(t)$ на заданном отрезке времени [0,T] с двумерным вектором управления $u(t) = (u_1(t),\ u_2(t))$.

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений (49) – (51):

$$\dot{x}_1 = r\, x_3(1 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3) - \left(\mu_{\cdot 1} + \frac{1}{T_1}\right) x_1\,, \qquad (49)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{T_1} - \left(\mu_{\cdot 2} + \frac{1}{T_2}\right) x_2 - x_2 u_2\,, \qquad (50)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{x_2}{T_3} - \mu_3 x_3 - x_3 u_3\,, \qquad (51)$$

с граничными условиями (52):

$$x_i(0) = x_i^0, \; x_i(T) = A_i > 0, \; i = 1,2,3. \qquad (52)$$

Параметры β_1, β_2 характеризуют соревновательные факторы, связанные с ограничением пищи и пространства для роста рыбы.

Параметр r>0 – коэффициент рождаемости, μ_1, μ_2, μ_3 – смертность рыбы в первом, втором и третьем классах, T_1, T_2 – время взросления рыбы и перехода в следующий класс.

Вектор-функция $u(t) = (u_1(t),\; u_2(t))$ характеризует усилие, прикладываемое для отлова рыбы во втором и третьем классе соответственно, величины, $x_2 u_2$, $x_3 u_3$ представляют собой количества рыбы второго и третьего классов, отлавливаемой в единицу времени.

На управление наложено естественные ограничения (53):

$$0 \le u_2(\mathrm{t}) \le u_{02},\; 0 \le u_3(\mathrm{t}) \le u_{03}, \;\text{ п.в. } t \in [0,T]. \qquad (53)$$

Объем рыбы, выловленной на заданном отрезке времени, должен быть ограничен ее спросом на рынке потребления и удовлетворять интегральному ограничению (54):

$$\int_0^T (x_2\, u_2 + x_3\, u_3)\; dt \le B. \qquad (54)$$

Требуется выбрать управление $u(t)$ таким образом, чтобы максимизировать прибыль рыболовецкой фирмы, которая определяется интегралом (55):

$$J(u) = \int_0^T e^{-\delta t}\,(\rho_2\, x_2\, u_2 + \rho_3 x_3 u_3 - u_2 - u_3)\; dt \to max. \qquad (55)$$

Здесь $\rho_2, \rho_3 > 0$ – стоимость рыбы второго и третьего классов соответственно, δ – дисконтирующий множитель.

Предложенный в работе подход позволяет находить решение задачи при различных значениях параметров модели и исследовать влияние этих параметров на оптимальный процесс и значение функционала задачи; решать многокритериальные задачи со сверткой критериев; исследовать влияние штрафных параметров и различных штрафных функций, используемых для учета ограничений, на оптимальный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смит Дж. Модели экологии. – М. Мир, 1976. – 184 с.
2. Братусь Ф.С., Новожилов А.С., Платонов А.Н. Динамические системы и модели в биологии. – Москва: Физ. мат. лит., 2010. – 400 с.
3. Мельников В.Н., Мельников А.В. Системные исследования в теории промышленного рыболовства, аквакультуры и экологии // Вестник АГТУ, серия «Рыбное хозяйство», 2010. – № 1. – С. 32–41.

4. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 184 с.
5. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Оптимальное управление процессом распространения эпидемии // Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: ТГУ, 1997. – С. 5–20.
6. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Ижевск: Институт Компьютерных исследований, 2003. 368 с.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: 1982. – 432 с.
8. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. 352 с.
9. Cushing J.M. An Introduction to structured population dynamic. – SIAM, 1998. – 193 p.
10. Андреева Е.А., Евтушенко Ю.Г. Численные методы решения задач оптимального управления для систем, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Фредгольма // Модели и методы оптимизации. – 1989. – № 1. – С. 4–13.

E.A. Andreeva, V.M. Tsiruleva, L.G. Kozheko

THE MODEL OF FISHERIES MANAGEMENT

Tver State University, Tver, Russia

At the present stage of development of science, technology and economics, much attention is paid to the development of the mathematical theory of optimal control, since it combines fundamental mathematical developments with actual applied problems. One of such urgent tasks is the conservation and use of natural resources [1]. The aim of the work is to build a mathematical model for fisheries management and to determine the optimal control of this process. The model takes into account the factor of natural birth rate, mortality and other parameters. With the advent of new information, the model is improved and supplemented by new conditions, constraints on the parameters of the problem [2], [3], [4]. The fisheries management is carried out by monitoring the intensity of capture. The goal of management is to maximize profits and preserve the population at a given level [5], [6]. The paper considers a continuous model that takes into account the size (weight) of the population, so that the entire fish population is divided into three age classes, differing in weight and size. In addition, the restriction on market demand is taken into account. The model of fisheries management allows to maximize profit from sale of the catch and to keep a level of a population necessary for the further development. To obtain optimality conditions in the continuous model, the Pontryagin Maximum Principle [5], [7] is used, and in the discrete model approximating the continuous one, the method of rapid automatic differentiation and numerical methods for solving extremal problems [5], [7] are used.

Keywords: optimal control, fishing, structured age population, mathematical model, equilibrium state, Pontryagin maximum principle, discrete optimal control problem.

REFERENCES

1. Smith J. Models of ecology. – M. Mir, 1976. – 184 p.
2. Bratus' F.S, Novozhilov A.S, Platonov A.N. Dynamic systems and models in biology. – Moscow: Phys. mat. lit., 2010. – 400 p.
3. Melnikov V.N., Melnikov A.V. System studies in the theory of industrial fisheries, aquaculture and ecology // Vestnik ASTU, series "Fish farming", 2010. – No. 1. – pp. 32–41.
4. Riznichenko G.Yu. Mathematical models in biophysics and ecology. – Izhevsk: Institute for Computer Research, 2003. – 184 p.
5. Andreeva E.A, Tsiruleva V.M. Optimal control over the spread of the epidemic // Application of functional analysis in approximation theory. – Tver: TSU, 1997. – pp. 5–20.
6. Bazykin A.D. Nonlinear dynamics of interacting populations. – Izhevsk: Institute for Computer Research, 2003. – 368 p.
7. Yevtushenko Yu.G. Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems. – M .: 1982. – 432 p.
8. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. Stability of biological communities. – Moscow: Nauka, 1978. – 352 p.
9. Cushing J.M. An Introduction to structured population dynamic. – SIAM, 1998. – 193 p.
10. Andreeva E.A, Evtushenko Yu.G. Numerical methods for solving optimal control problems for systems described by integro-differential equations of Fredholm type // Models and optimization methods. – 1989. – No. 1. – pp. 4 – 13.