УДК 519.53

М.Л. Лапшина, А.С. Черных, Н. Ю. Юдина

АДАПТАЦИЯ ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО ПОДХОДА К ПРОБЛЕМАМ СОГЛАСОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, Воронеж, Россия

Современное состояние предприятий во многом определяется экономической активностью структурных подразделений, деятельность которых является определяющей при выпуске продукции различного назначения. Для более четкой координации планов сформулируем и рассмотрим возможность дальнейшего оптимального решения задачи согласования оптимальных планов на экономическом уровне, которую можно рассматривать как одну из частных постановок общей задачи о соотношении локальных и глобальных интересов предприятия или компании, которая была поставлена и изучалась уже в первых экономико-математических исследованиях, проводившихся как в нашей стране, так и за рубежом. Метод декомпозиции связан с аппроксимационным подходом, использовавшимся при разработке системы многоступенчатой оптимизации перспективных экономических планов. Оптимальный план глобальной задачи строится на основе вариантных расчетов оптимальных планов некоторых совокупностей локальных объектов, причем удается указать и формальный метод выделения таких структур. В работе также строится специализированный метод декомпозиции выпуклой оптимизационной задачи, описывающий один из возможных подходов к решению некоторых проблем согласования. Исследуются связи между ценами на продукцию, ресурсами и объективно обусловленными оценками глобальной и локальных задач, а также возможности использования этих оценок в функционировании экономического механизма.

Ключевые слова: оптимальность, модель, ресурсы, вектор, продукция

ВВЕДЕНИЕ

Современную экономическую науку трудно представить без использования и исследования математических моделей. В западной экономической литературе подавляющее большинство теоретических и прикладных научных статей в области экономики содержат в качестве центральной части ту или иную математическую модель, разработанную для проверки или иллюстрации гипотез и выявления эффектов.

По мнению ряда экономистов, признание практически любой новой экономической теории или концепции едва ли не в решающей степени зависит от того, в какой мере эта концепция допускает математическую формализацию, насколько интересен используемый при этом аппарат и насколько впечатляют полученные при исследовании модели математические результаты.

В связи с различными кризисными ситуациями в деятельности компаний возникают проблемы, которые необходимо решать, как в стратегическом, так и в оперативном порядке. Любое управленческое решение, принимаемое в современных кризисных условиях, предполагает своевременную подготовку к появлению проблем и их своевременное решение или устранение. В связи с этим проблемы, связанные с принятием решения, можно разделить на три укрупненные группы: этапные, структурно-функциональные, методологические.

К структурно-функциональным проблемам относятся: производственно-технологические, закупочно-сбытовые, товарно-ассортиментные, организационные, правовые, инвестиционные, финансовые, кадровые.

Этапные проблемы формируются на стадиях принятия управленческих решений и включают в себя проблемы распознавания предкризисных ситуаций, проблемы жизнедеятельности предприятий в условиях рисков, проблемы уходов от рисков и другие.

Методологические проблемы состоят в выборе комплекса эффективных средств, методов и инструментов, позволяющих на научной основе обеспечить конкретное управленческое решение в условиях рисков. Методологические решения позволяют обеспечить реализацию частных задач, например, прогнозирование угроз, финансово-экономическое прогнозирование кризисных процессов, разработки концепции эффективного менеджмента.

Представленная работа еще раз подтверждает возможность использования имитационных подходов к решению одной из ключевых проблем управления предприятиями в современных нестабильных условиях, методологической, когда в качестве инструментария используются средства матричного исчисления, наиболее полно соответствующие информационным массивам, позволяющим читывать большие объемы информации и наиболее легко адаптируемые к пакетам прикладных программ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для построения оптимального плана сформулируем математическую постановку задачи. При этом будем учитывать, что мощности предприятий описываются ограниченными выпуклыми множествами с нулевой точкой, а объединение их в систему происходит посредством линейной технологической модели. Существование вектора *p,* удовлетворяющего условиям достаточно для оптимальности вектора z в задаче

$$\forall z: u(z) \le u(\underline{z}) + p(z - \underline{z}) \tag{1}$$

$$p(\underline{z} - z) \ge 0 \quad \forall z \in Z, \tag{2}$$

и достаточно для оптимальности вектора $\underline{z}$ в задаче

$$\max\{u(z) \mid z \in Z\}, \tag{3}$$

где z – множество, состоящее из компонент, соответствующих оптимальному плану; $\underline{z}$ - локальное значение исходной задачи; Z-множество, состоящее из всех возможных наборов значений, используемых для построения оптимальных планов. Но (1), (2) будут и необходимы, если функция u собственная, и вогнутая, а множество Z выпуклое [1]. Чтобы наделить модель (3) отраслевой структурой, предположим, что множество Z связано линейным преобразованием специального вида

$$z = (\xi - A)x \tag{4}$$

с некоторым другим множеством *X,* которое удобно определить через его элементы - векторы $x \in X$ - неравенствами

$$F(x) \le M, \quad x \ge 0, \tag{5}$$

где вектор $M > 0$ и фиксирован; компоненты $f_j,\ j \in J$, векторной функции F - калибровочные функции некоторых выпуклых фигур $\underline{X}_j$; матрица ξ - псевдоединичная (в каждом ее столбце находится только один ненулевой элемент, равный единице), а способ построения и некоторые особенности матрицы *A* уточним позже.

Поскольку *X* компактно, то для существования у задачи (3)-(5) оптимальных решений достаточно, чтобы функция *u* была замкнутой. В дальнейшем задачу (3)-(5) назовем глобальной. Задачу с линейным критерием

$$min\, cx, \tag{6}$$

в ограничения которой, кроме условий (5) входят равенства

$$z = (\xi - A)x \tag{7}$$

при некотором $b \ge 0$, а вектор c, входящий в (6), связан с матрицей *A* линейным соотношением

$$c = qA \tag{8}$$

с помощью некоторого другого вектора *q*, будем называть локальной. Компонентами векторов *b* и *q* устанавливаются значения параметров, от выбора которых зависит оптимальное решение локальной задачи *x*. Если условия (5) и (7) совместны, то оно существует при любом выборе q и для него выполняются условия:

$$\xi x = b, \tag{9}$$

$$F(\underline{x}) \le M, r \ge 0, \quad rF(\underline{x}) = rM, \tag{10}$$

$$\underline{x} \ge 0, \quad w\xi \le c + r\Phi(\underline{x})\underline{x}, \tag{11}$$

$$\Phi(\underline{x})x \le F(x)\ \forall x, \quad r\Phi(\underline{x})\underline{x} = rF(\underline{x}), \tag{12}$$

причем элементы матрицы $\Phi(\underline{x})$ вычисляются вместе с $\underline{x}$. Теперь можно сформулировать как использовать тройки $\underline{x}, w, r,$ которые могут быть получены из (8)-(12) при различных значениях q и b, для построения пары $\underline{z}$, p, удовлетворяющей (1) и (2). В общей форме линейная модель описывается условиями

$$z = \hat{G}\lambda, \quad \lambda \ge 0 \tag{13}$$

с нормативной матрицей $\hat{G}$ и вектором технологических переменных λ в проекты $\{i \mid z_i > 0\}$, которые затем могут использоваться за рамками производственной системы, фактически же это преобразование осуществляется какими-то предприятиями $j \in J$, выполнявшими заказы на производство продукции в рамках их технологической специализации $i \in I_j$. Если в I_j включены все наименования продукции, которые предприятие могло бы производить, то $I_+ = \cup I_j$ будет множеством всей продукции, производство которой возможно в рассматриваемой системе. Соответствие продукция-предприятие отображается матрицей ξ, которая строится следующим образом: в заголовках ее столбцов перечисляются пары $(i, j)\ \forall\ j \in J$ и $i \in I_j$, а в заголовках строк - имена всей продукции из I_+, затем в строке *i* каждого столбца (i, j) ставится единица, остальные же его элементы приравниваются нулю. Весь набор заказов представляется компонентами x_{ij} вектора *x*, вектором ξx определяются общие объемы заказа по всей продукции, а вектором b в (7) - объявленные потребности в продукции [2-3]. Предположим, что при выполнении заказа x_{ij} предприятие использует конкретный технологический процесс с нормативами выхода и затрат участвующих в нем продукции и ресурсов, определенными некоторым столбцом g^s матрицы $\hat{G}$. Соответственно $g_{is} > 0$, хотя одновременно в нем могут производиться и другая продукция.

Полагая $\underline{g^s} = g^s / g_{is}$, можно определить перенормированный процесс, интенсивность использования которого будет измеряться уже величиной x_{ij}, а столбец $\underline{g}^s$ под именем (i, j) - включить в новую матрицу *G*, преобразуя равенства из (13) к виду $z = Gx$. Таким образом, имена столбцов у матриц ξ и *G* совпадают и если в I_+ действительно входит вся продукция, то в дополнительных строках матрицы *G*, подмножество которых $I\_$ может быть и не пустым, не будет положительных элементов, а значит, абсолютные значения соответствующих компонент вектора *z* должны рассматриваться как объемы потребления внешних ресурсов.

К матрице ξ добавляются нулевые строки и, полагая $A = \xi - G$, приходим к (4). В рамках этой модели можно сформулировать несколько различных задач [4]. Будем называть систему открытой, если

$$I\_ \neq \varnothing \,\&\, \forall (i, j)\, \exists\, s \in I\_ : \underline{g}^{ij} < 0, \tag{14}$$

и закрытой, когда $I\_$=0. Таким образом, открытая система не может функционировать без притока внешних ресурсов, а в закрытой все их виды производятся внутри самой системы. Это не означает, что закрытая система может обходиться только внутренними ресурсами. Но если матрица *A* полупродуктивна, то производство продукции без использования внешних ресурсов становится возможным и к (3)-(5) можно добавить условие $z \geq 0$. Оптимальное решение такой задачи назовем внутренним. Условие (2) для него сохраняется, а (1) распадается на два соотношения

$$\forall z : u(z) \leq u(\underline{z}) + \omega(z - \underline{z}), \tag{15}$$

$$\underline{z} \geq 0, \quad \omega \leq p, \quad \omega \underline{z} = p \underline{z}. \tag{16}$$

Вместе с оптимальным вектором $\underline{z}$ формируется уже не один, а два вектора оценок. Но $\omega_i, i \in I_+$, присутствуют в экономической интерпретации неявно, так как из (16) следует, что $\omega_i = p_i$, когда $\underline{z}_i > 0,$ и $\underline{z} = 0,$ если если $\omega_i < p_i$. Поэтому представим в величинах ω_i, оценки потребительской стоимости продукции. Экономический смысл вектора ω сформулируем в следующем утверждении.

Если $\underline{z}, p \geq 0,$ то совокупной конечной продукции $p, \underline{z} > 0$ тогда и только тогда, когда $\exists i \in I_+ :\ \omega_i \underline{z}_i > 0.$ Неравенство $p, \underline{z}$ становится строгим, если $\exists i \in I_+ :\ \ p_i \underline{z}_i > 0.$ Но тогда из дополняющей нежесткости в (16) вытекает, что $\omega_i > 0$. Если же $\exists i \in I_+ :\ \omega_i \underline{z}_i > 0,$ то $p_i > 0.$ Неравенство

$p \geq 0$ выполняется автоматически, если вместо (4) к (15) и (16) добавить условия:

$$\underline{z} \leq (\xi - A)\underline{x}, \quad p \geq 0, \quad p\underline{z} = p(\xi - A)\underline{x}, \tag{17}$$

первым, из которых допускается образование нераспределенных остатков в векторе конечной продукции [5].

Множество допустимых решений глобальной задачи в этом случае преобразовывается к виду

$$Y = \{z \mid \ 0 \leq z \leq (\xi - A)x, x \in X\}$$

и для внутреннего решения ослабление требований точного баланса кажется вполне естественным. Систему балансовых соотношений (4) (или (17)) назовем леонтьевской, если матрица $A \geq 0$. В леонтьевской модели ξx совпадает с вектором валовых объемов производства. $Ax \geq 0$ и компонентами этого вектора устанавливаются объемы производственных затрат, а выпуски предприятий определены векторами x^j с ненулевыми компонентами на множествах I_j. Если к тому же компонентами M_j (вектора M) измеряются мощности предприятий, то система неравенств в (5) распадается, принимая вид

$$f_j(x^j) \leq M_j, \ x^j \geq 0, \ j \in J, \tag{18}$$

а в матрице $\Phi(x)$ отличными от нуля могут быть лишь те из элементов ϕ_s^{ij}, для которых $s = i,$ а $i \in I_j$. Поэтому для них удобно ввести обозначения φ_{ij}, и, если $\varphi_{ij} > 0 \ \forall \ i \in I_j$, то значения φ_{ij} можно рассматривать в качестве коэффициентов, определяющих ресурсы мощностей, которые необходимо использовать для выпуска единицы продукции i предприятием j.

Условие (2) выполняется, причем в любой из рассмотренных моделей, если пары $\underline{x}, \underline{z}$ (из (4) или (17)) вектор x окажется одним из оптимальных решений задачи

$$\max\{p(\xi - A)x \mid x \in X\}. \tag{19}$$

В условиях (10) - (12) остаются (10) и (12), а (11) нужно заменить такими соотношениями

$$\underline{x} \geq 0, \ p\xi \leq pA + r\Phi(\underline{x}), \quad p(\xi - A)\underline{x} = r\Phi(\underline{x})\underline{x}. \tag{20}$$

Из сопоставления их с (8) и (11) видно, что в локальной задаче вместо одной системы цен p как-то бы используются два их набора: w и q. В этом заключается принципиальное различие между типами задач [6-7]. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\max\{q(\xi - A)x \mid \xi x = b, x \in X\}, \tag{21}$$

ограничения, которой совпадают с ограничениями локальной задачи, а критерий - с точностью до значения вектора цен - с критерием задачи (19). Если функционал локальной задачи формируется в (8) для некоторых цен q, то для любой системы оценок продукции w, сформировавшихся в оптимальном решении, равенства $w_i = q_i$ выполняются для тех ограничений, входящих в (7), которые оказываются несущественными в (21).

Так как (7) входит в (21), то $q(\xi - A)x = qb - qAx$ для всех допустимых x, а значит, неравенства $q(\xi - A)x > q(\xi - A)x$ и $qAx < qAx$ следуют одно из другого для любой пары допустимых решений x, $\underline{x}$. Поэтому множества оптимальных решений задачи (5)-(8) и (21) совпадают.

Условия оптимальности вектора $\underline{x}$ в (21) можно получить, меняя обозначение для вектора оценок в (9). Тогда условия (9), (10) и (12) сохраняются, а в (11) вместо w входит разность $q - s$. Поскольку множество оптимальных решений при этом не изменилось, то

$$w = q - s, \text{ т.е. } g_i = w_i, \text{ если } s_i = 0.$$

Таким образом, новая система оценок продукции w, отличная от q, порождается фактом оптимизации решения локальной задачи, а из (8) – (12) получаем

$$wb - qAx = rM. \tag{22}$$

В леонтьевской модели это означает, что для формирования совокупного дохода rM предприятия должны приобретать все необходимые им материальные ресурсы по ценам q, а всю произведенную продукцию - реализовать по ценам w.

Отметим, что в глобальной модели этой проблемы не возникает: полагая в (22) $w = q = p$ и $b = z + Ax$, получаем

$$Pz = rM. \tag{23}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С экономической точки зрения различие между ценами w_i и q_i возникающее в локальной модели, означает, что прямые связи между потребителями и поставщиками в форме купли-продажи продукции становятся невозможными. В леонтьевской модели и при условиях (18) правило формирования цены принимает вид

$$\omega_i = \sum_{s=i} q_s a_{ij} + r_j \varphi_{ij}, \tag{24}$$

причем, если допускается образование нераспределенных остатков, то можно ограничиться значениями $q \geq 0$. В этом случае подсчитанные в ценах q коэффициенты материальных затрат $c_{ij} > 0$. Когда расчет цен выполнен всеми предприятиями, то цены $p,$ с помощью которых в глобальной модели подсчитывались величины c_{ij}, не изменяются, т.е. они устойчивы относительно этой операции, а цены w по каким-то или даже всем компонентам отличны от $q,$ т.е. цены q могут оказаться неустойчивыми.

Устойчивость не является исключительным свойством цен $p,$ так как, если критерий задачи (19) определить в любых ценах $q,$ то по условиям (20) они будут устойчивы. Полагая $b_q = \xi x_q,$ можно определить $z_q = b_q - Ax_q$. План $z_q, \underline{x}_q$ будет оптимальным внутренним решением, если:

a) $z_q \geq 0$ (но это не всегда выполняется);

б) для вектора w можно подобрать такое значение w_q, при котором для тройки z_q, q, w_q выполнятся условия (15) и (16).

Таким образом, цены оптимального плана p отличаются от произвольной устойчивой системы цен q тем, что существование необходимого значения вектора w для них гарантируется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнер Г.Б. Оценка параметров имитационных экономико-статистических моделей с учетом априорной качественной информации / Г.Б. Клейнер, Н.Л. Николаева // Экономика и мат. методы. – М.: Наука - 2006. - Т. 22. №. 4. - С. 97-112.

2. Дружинин А.И. Управление финансовой устойчивостью / А.И. Дружинин, О.Н. Дунаев. - Екатеринбург: ИПК УГТУ, - 2008. - 74 с.

3. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов / Л.В. Канторович. - М.: Изд-во АН СССР, - 1960. - 52 с.

4. Кузнецов В.В. Об устойчивости рыночного положения фирмы / В.В. Кузнецов, В.В. Фирсакова // Экономика и математические методы. – М.: Наука - 2004. - Т.36, №3 – С. 136-139.

5. Johnston J., DiNardo J. Econometric Methods / J. Johnston, J. DiNardo. N.Y.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc. - 1997. - 240 p.

6. Lee D.T., Wu Y.F. Geometric complexity of some location problems, Algorithmica, 1 / D.T. Lee, Y.F. Wu. - 2006. - p. 193-211.

7. Lemareshal C., Nemirovskii A., Nesterov Yu. New Variants of Bundle Methods / C. Lemareshal, A. Nemirovskii, Yu. Nesterov // Mathematical Programming. Serios B. - 2015. - V 69. - №1. - p.67-77.

M. L. Lapshina, A. S. Chernykh, N.Y. Yudina

ADAPTATION OF LINEAR METHODS PROGRAMMING TO THE QUESTION OF HARMONIZATION OF OPTIMAL PLANS

Voronezh State Forestry University by F.G. Morozov, Voronezh, Russia

The current state of enterprises is largely determined by the economic activity of structural divisions, whose activities are decisive in the production of products for various purposes. For more precise coordination of plans, we formulate and consider the possibility of further optimal solution of the problem of harmonization of optimal plans at the economic level, which can be considered as one of the partial productions of the general problem of the relationship between the local and global interests of an enterprise or a company that has been delivered and studied already in the first economic and mathematical studies conducted both in our country and abroad. The decomposition method is associated with the approximation approach used in the development of a multi-step optimization system for prospective economic plans. The optimal plan for the global task is based on variant calculations of the optimal plans for certain collections of local objects, and it is possible to specify a formal method for distinguishing such structures. A specialized method of decomposing a convex optimization problem is also constructed, describing one of the possible approaches to solving some reconciliation problems. The relationship between product prices, resources and objectively determined assessments of global and local problems is investigated, as well as the possibility of using these estimates in the functioning of the economic mechanism.

Keywords: optimality, model, resources, vector, products

REFERENCES

1. Kleyner G.B. Otsenka parametrov imitatsionnykh ekonomiko-statisticheskikh modeley s uchetom apriornoy kachestvennoy informatsii / G.B. Kleyner, N.L. Nikolaeva // Ekonomika i mat. metody. – M.: Nauka - 2006. - Vol.22. No.4. - pp. 97-112.
2. Druzhinin A.I. Upravlenie finansovoy ustoychivost'yu / A.I. Druzhinin, O.N. Dunaev. - Ekaterinburg: IPK UGTU, - 2008. - 74 p.
3. Kantorovich L.V. Ekonomicheskiy raschet nailuchshego ispol'zova-niya resursov / L.V. Kantorovich. - M.: Izd-vo AN SSSR, - 1960. - 52 p.
4. Kuznetsov V.V. Ob ustoychivosti rynochnogo polozheniya firmy / V.V. Kuznetsov, V.V. Firsakova // Ekonomika i matematicheskie metody. – M.: Nauka - 2004. - Vol.36, No.3 – pp. 136-139.
5. Johnston J., DiNardo J. Econometric Methods / J. Johnston, J. Di-Nardo. N.Y.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc. - 1997. - 240 p.
6. Lee D.T., Wu Y.F. Geometric complexity of some location problems, Algorithmica, 1 / D.VOL.Lee, Y.F. Wu. - 2006. - pp. 193-211.
7. Lemareshal C., Nemirovskii A., Nesterov Yu. New Variants of Bundle Methods / C. Lemareshal, A. Nemirovskii, Yu. Nesterov // Mathematical Programming. Serios B. - 2015. – Vol. 69. - No.1. - pp.67-77