

УДК 519.673

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.51.4.012](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.51.4.012)

Математическая модель 12-канальных электрокардиограмм с учетом пространственных зависимостей отведений

Е.Ю. Щетинин✉

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация

Резюме. В статье представлена инновационная математическая модель генерации 12-канальных электрокардиограмм (ЭКГ), основанная на принципиально новом подходе к учету пространственных зависимостей между отведениями. Основная научная новизна исследования заключается в разработке метода линейного преобразования набора физиологически обоснованных базисных сигналов, представляющих проекции электрического поля сердца, с добавлением коррелированного шума, точно имитирующего реальные клинические помехи. В отличие от традиционных генеративных моделей (VAE, GAN), которые работают как «черные ящики», модель обеспечивает явный контроль над морфологией ключевых волн (P, QRS, T) и строгое соблюдение физиологических ограничений, включая законы Кирхгофа для конечностных отведений. Это гарантирует анатомическую согласованность сигналов между всеми 12 отведениями, что ранее не достигалось в подобных работах. Модель продемонстрировала высокую производительность на датасете PhysioNet PTB-XL: MSE = 0,015, косинусное сходство = 0,94, F1-score = 0,88 для нормальных ритмов и 0,82 для аритмий. Важным преимуществом модели является ее вычислительная эффективность (время генерации 50 мс) и относительно низкие требования к памяти (2,5 Гб). Сравнительный анализ с современными генеративными моделями (VAE, GAN, Diffecg) выявил превосходство предложенной модели в интерпретируемости, контроле параметров генерации и физиологической достоверности синтезированных сигналов. Разработанная модель открывает новые возможности для создания качественных синтетических данных ЭКГ, необходимых для обучения ИИ-систем медицинской диагностики, а также для применения в телемедицине и медицинском образовании. Сочетание физического моделирования с машинным обучением представляет особую ценность для исследователей и клиницистов, нуждающихся в интерпретируемых и клинически достоверных инструментах генерации ЭКГ.

Ключевые слова: электрокардиограмма, пространственные зависимости, генеративные модели, интерпретируемость, физиологическое моделирование, синтетические данные ЭКГ, машинное обучение в кардиологии.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Севастопольского государственного университета, проект 42-01-09/319/2025-1.

Для цитирования: Щетинин Е.Ю. Математическая модель 12-канальных электрокардиограмм с учетом пространственных зависимостей отведений. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=2054> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.012

Mathematical model of a 12-lead electrocardiograms accounting for spatial dependencies

E.Yu. Shchetinin✉

Sevastopol State University, Sevastopol, the Russian Federation

Abstract. This article presents an innovative mathematical model for generating 12-lead electrocardiograms (ECG), based on a fundamentally novel approach to accounting for spatial dependencies between leads. The primary scientific contribution of this research lies in the development

of a method utilizing linear transformation of a set of physiologically grounded basis signals representing projections of the heart's electric field, supplemented with correlated noise that accurately simulates real clinical interference. Unlike traditional generative models (VAE, GAN, Diffecg), which operate as "black boxes", the proposed model enables explicit control over the morphology of key waveforms (P, QRS, T) and strict adherence to physiological constraints, including Kirchhoff's laws for limb leads. This ensures anatomical consistency of signals across all 12 leads, an achievement not previously attained in similar studies. The model demonstrated high performance on the PhysioNet PTB-XL dataset: MSE = 0.015, cosine similarity = 0.94, F1-score = 0.88 for normal rhythms and 0.82 for arrhythmias. A significant advantage of the model is its computational efficiency (generation time 50 ms) and relatively low memory requirements (2.5 GB). Comparative analysis with contemporary generative models (VAE, GAN, CardioDiff) revealed the superiority of the proposed approach in interpretability, parameter control, and physiological authenticity of synthesized signals. The developed model opens new possibilities for creating high-quality synthetic ECG data essential for training AI-based medical diagnostic systems, as well as for applications in telemedicine and medical education. The integration of physical modeling with machine learning presents particular value for researchers and clinicians requiring interpretable and clinically reliable ECG generation tools.

Keywords: electrocardiogram, spatial dependencies, generative models, interpretability, physiological modeling, synthetic ECG data, machine learning in cardiology.

Acknowledgements: This work was supported by Sevastopol State University, project No. 42-01-09/319/2025-1.

For citation: Shchetinin E.Yu. Mathematical model of a 12-lead electrocardiograms accounting for spatial dependencies. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(4). (In Russ.). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=2054> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.012

Введение

Электрокардиограмма (ЭКГ) является фундаментальным инструментом в кардиологии для диагностики аритмий, ишемических заболеваний и других патологий сердца. Традиционные модели ЭКГ часто рассматривают отведения независимо, игнорируя пространственные зависимости, что снижает точность интерпретации, особенно для сложных аритмий. Фундаментальные работы [1, 2] заложили теоретическую основу для численного моделирования сердечной электропроводности через бидоменную модель [3]. Эти исследования обеспечивают высокую физиологическую достоверность и позволяют симулировать распространение деполяризации в миокарде. Однако их основной недостаток – высокая вычислительная сложность и необходимость детальной анатомической реконструкции сердца, что делает их малоприменимыми для массового применения, особенно в контексте быстрой генерации ЭКГ в клинических или исследовательских целях. Кроме того, эти модели плохо масштабируются для генерации разнообразных патологических форм, так как требуют ручной настройки параметров проводимости и порогов возбуждения [4].

В то же время, подходы на основе машинного обучения, представленные, например, в работах [5, 6], продемонстрировали значительный прогресс в генерации реалистичных ЭКГ. Использование вариационных автоэнкодеров (VAE) [7, 8], генеративных состязательных сетей (GAN) [9] и диффузионных моделей [10, 11] позволяет создавать синтетические сигналы, близкие к реальным. Однако эти методы имеют существенные ограничения. Так, модели GAN, несмотря на высокое качество генерации, страдают от нестабильности обучения, коллапса процесса обучения и сложности контроля над генерируемыми паттернами [12]. Архитектура LSTM-CNN GAN, представленная в работе [13], и 2D-GAN [14] показывают хорошие результаты, но не обеспечивают точного контроля над локализацией и амплитудой ключевых волн (P,

QRS, T), что критично для клинической достоверности. Модели VAE склонны к размыванию сигнала и потере деталей морфологии.

Кроме того, большинство существующих моделей генерируют ЭКГ либо в одноканальном формате, либо не учитывают межканальную согласованность 12-канальной записи. Это приводит к физически невозможным конфигурациям, когда морфология сигнала в разных отведениях не соответствует анатомическим закономерностям. Например, инверсия зубца Т в отведениях V1–V2 при сохранении положительного Т в II, aVF может быть сгенерирована без учёта клинической логики. В работе [9] отмечают эту проблему, подчёркивая, что большинство GAN не моделируют пространственную корреляцию между отведениями.

Современные модели глубокого обучения требуют больших, сбалансированных и размеченных наборов данных, что затруднено из-за ограниченного доступа к клиническим данным и дисбаланса классов (например, редкие аритмии). Хотя методы аугментации частично решают эту проблему [6], они не создают новых паттернов, а лишь модифицируют существующие, что ограничивает разнообразие обучающей выборки.

Таким образом, несмотря на значительный прогресс, существующие методы генерации ЭКГ страдают от ряда критических недостатков:

- отсутствие физиологической согласованности между 12 отведениями;
- низкая интерпретируемость и контроль над генерируемыми параметрами;
- потеря точной морфологии волн при генерации;
- зависимость от больших объемов данных и высокая вычислительная стоимость.

Эти ограничения указывают на необходимость разработки новой оригинальной модели генерации 12-канальных ЭКГ, которая сочетала бы преимущества физиологического моделирования (например, бидоменной модели) с гибкостью и скоростью современных генеративных моделей. В данной работе предложена модель, сочетающая в себе физиологическую точность и вычислительную эффективность, используя линейное преобразование базисных сигналов для генерации 12-канальных ЭКГ с учетом пространственных зависимостей. Ее основной вклад в исследования разработки эффективных моделей ЭКГ-сигналов состоит в следующем:

1. Учет межканальных корреляций через матрицу преобразования.
2. Имитация реалистичного шума для повышения достоверности.
3. Потенциал для интеграции с ИИ-системами диагностики.

Материалы и методы

Электрокардиограмма представляет собой запись разности электрических потенциалов, возникающих при возбуждении сердца, с поверхности тела. Стандартная 12-канальная ЭКГ состоит из 6 отведений от конечностей (I, II, III, aVR, aVL, aVF) и 6 грудных отведений (V1–V6). Эти отведения фиксируют проекции электрического поля сердца с различных направлений. Математическая модель должна отражать физиологические связи между этими отведениями. Отведения I, II, III являются основными отведениями Эйнтховена. Их напряжения связаны законом Кирхгофа:

$$I(t) + II(t) + III(t) = 0.$$

Усиленные отведения от конечностей (aVR, aVL, aVF) формируются по следующим формулам:

$$aVR(t) = -\frac{1}{2}(I(t) + II(t)),$$

$$aVL(t) = \frac{1}{2}(I(t) - III(t)),$$

$$aVF(t) = \frac{1}{2}(II(t) - I(t)).$$

Эти соотношения могут быть записаны в матричной форме как линейное преобразование вектора основных отведений

$$E_{limb} = [I, II]^T,$$

$$E_{limb12} = T_{limb} \cdot E_{limb},$$

где $E_{limb12} = [I, II, III, aVR, aVL, aVF]^T$, T_{limb} имеет размерность 6×2 .

Грудные отведения V1–V6 регистрируют электрическую активность сердца в горизонтальной плоскости. Их форма зависит от ориентации главного вектора возбуждения относительно положения электрода. Изменение формы комплекса QRS от V1 к V6 отражает переход «зрительной оси» от правого желудочка к левому.

Математическая модель генерации ЭКГ-сигналов с учетом коррелированных отведений. Предложена модель, в которой 12 отведений формируются путем линейного преобразования набора базисных сигналов $B(t)$, представляющих проекции электрического поля сердца на несколько ключевых направлений. Алгоритм генерации ЭКГ-сигналов состоит в следующих шагах.

Шаг 1: Генерация базисных сигналов

Генерируется вектор базисных сигналов $B(t) = [B_1(t), B_2(t), \dots, B_k(t)]^T$. Эти сигналы могут представлять, например:

- $B_1(t)$: Компонент, соответствующий активности нижней стенки левого желудочка (аналог отведения II).
- $B_2(t)$: Компонент, соответствующий активности боковой стенки левого желудочка (аналог отведения I).
- $B_3(t)$: Компонент, соответствующий активности межжелудочковой перегородки (аналог отведения V1).
- $B_k(t)$: Дополнительные компоненты для моделирования сложной пространственной структуры.

Каждый базисный сигнал $B_i(t)$ может быть сгенерирован как сумма P, QRS и T волн с соответствующими параметрами, характерными для данного направления.

Шаг 2: Линейное преобразование

Сигналы во всех 12 отведениях $E_{12}(t) = [E_I(t), E_{II}(t), \dots, E_{V6}(t)]^T$ формируются путем линейного преобразования базисных сигналов:

$$E_{12}(t) = T \cdot B(t),$$

где T – фиксированная матрица преобразования размерности $12 \times k$. Элементы этой матрицы $T_{i,j}$ определяют вклад j -го базисного сигнала $B_j(t)$ в формирование i -го отведения $E_i(t)$. Для отведений от конечностей элементы матрицы T подбираются таким образом, чтобы выполнялись законы Эйнтховена и формулы для усиленных отведений. Для грудных отведений элементы T подбираются для обеспечения плавного перехода формы комплекса от V1 к V6. Например, вклад компонента, соответствующего перегородке, будет высоким для V1 и низким для V6.

Шаг 3: Добавление коррелированного шума

Для придания сигналу реалистичности добавляется шум $N(t)$, коррелированный между каналами:

$$E_{12}^{final}(t) = E_{12}(t) + N(t).$$

Шум моделируется как $N(t) = L \cdot W(t)$, где $W(t)$ – вектор независимого белого шума, а L – матрица, определяющая корреляционную структуру (например, через

разложение Холецкого ковариационной матрицы $C = LL^T$, где элементы $C_{i,j}$ зависят от «расстояния» между отведениями i и j .

Обоснование модели.

– Физиология: Модель основана на представлении ЭКГ как проекций векторного поля. Использование базисных сигналов соответствует разложению сложного поля по набору направлений:

– Законы Кирхгофа: Точные математические соотношения между I, II, III, aVR, aVL, aVF естественным образом воспроизводятся путем соответствующего выбора подматрицы T_{limb} .

– Пространственные зависимости: Плавное изменение формы комплекса в грудных отведениях моделируется градиентом вкладов базисных компонентов в матрице T .

– Корреляции: Коррелированная структура шума имитирует общие источники помех и физическую близость электродов.

Таким образом, данная модель учитывает анатомические и электрические взаимосвязи между регионами сердца и положением электродов, обеспечивая физиологическую достоверность сигналов, что позволяет генерировать физиологически правдоподобные 12-канальные ЭКГ сигналы с заданными межканальными корреляциями и пространственными зависимостями.

Набор данных. Модель обучалась на наборе данных PhysioNet PTB-XL, содержащем 21,837 записей 12-канальных ЭКГ с частотой дискретизации 500 Гц [15]. Данные включают нормальные ритмы и патологии, такие как фибрилляция предсердий, блокады и ишемические изменения. Данные нормализованы до амплитуды ± 1 мВ, применялись аугментации (добавление шума, временное масштабирование) для повышения устойчивости модели.

Обучение и оптимизация модели. Обучение модели направлено на оптимизацию матрицы преобразования T и параметров шума L для минимизации разницы между сгенерированными и реальными ЭКГ-сигналами. Алгоритм генерации ЭКГ-сигналов включает следующие этапы:

Ввод параметров:

- Параметры для базисных сигналов (амплитуды, длительности волн P, QRS, T).
- Матрица преобразования T .
- Матрица корреляции шума L .

Генерация базисных сигналов. Создается вектор $B(t)$, содержащий k базисных сигналов, каждый из которых моделирует активность определенного региона сердца. Базисные сигналы $B(t) = [B_1(t), B_2(t), \dots, B_k(t)]$ представляют проекции электрического поля сердца на ключевые направления, такие как активность нижней стенки левого желудочка, боковой стенки или межжелудочковой перегородки. Каждый базисный сигнал моделирует волны P, QRS и T, которые являются основными компонентами ЭКГ-сигнала. Параметры этих волн задаются следующим образом:

Источник параметров:

– Параметры (амплитуды, длительности, временные положения) основываются на физиологических моделях ЭКГ, таких как описанные в работе [16]. Эти модели учитывают нормальные и патологические ритмы, включая фибрилляцию предсердий, блокады и ишемические изменения.

– Используются эмпирические распределения, полученные из клинических данных, таких как набор PhysioNet PTB-XL, где амплитуды и длительности волн измерены для различных состояний сердца.

Начальные параметры:

Амплитуда: для нормальных ритмов амплитуды волн задаются в диапазоне, соответствующем клиническим нормам:

- Волна P: 0,1–0,25 мВ.
- Комплекс QRS: 0,5–2,0 мВ (наиболее выражен в отведениях, связанных с левым желудочком).
- Волна T: 0,1–0,5 мВ.
- Для патологических ритмов (например, аритмий) амплитуды могут варьироваться, например, уменьшаться при ишемии или увеличиваться при гипертрофии.

Длительность:

- Волна P: 80–120 мс.
- Комплекс QRS: 80–120 мс для нормальных ритмов, удлинение до 140 мс при блокадах.
- Волна T: 160–200 мс.

Временные положения: положения пиков волн задаются относительно начала сердечного цикла, с учетом частоты сердечных сокращений (например, 60–100 ударов в минуту для нормального ритма).

Метод задания:

Параметры инициализируются с использованием средних значений из клинических данных, с добавлением случайных вариаций в пределах стандартного отклонения, чтобы учесть индивидуальную изменчивость. Например:

- Амплитуда волны P: $A_P \sim \mathcal{N}(0,15; 0,052)$ мВ.
- Длительность QRS: $D_{QRS} \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$ мс.

Для патологических ритмов параметры могут быть скорректированы на основе диагностических классов из PTB-XL (например, удлинение QRS для блокад).

Используются физиологические модели, такие как сумма гауссовых функций или полиномиальные аппроксимации, для генерации формы волн: $B_i(t) = A_P f_P(t) + A_{QRS} \cdot f_{QRS}(t) + A_T \cdot f_T(t)$, где $f_{QRS}(t)$, $f_P(t)$, $f_T(t)$ – функции, моделирующие форму волн (например, гауссовы или экспоненциальные).

Аугментация данных:

Для повышения устойчивости модели к вариациям применяются аугментации, такие как добавление случайного шума или временное масштабирование (например, изменение частоты сердечных сокращений в диапазоне 50–120 ударов в минуту).

Матрица преобразования T. Матрица преобразования T (размером $12 \times k$, где k – число базисных сигналов, (обычно 3–6) используется для преобразования базисных сигналов $B(t)$ в 12-канальные ЭКГ-сигналы путем матричного умножения $E_{12}(t) = T \cdot B(t)$. Эта матрица отражает физиологические и пространственные зависимости между каналами.

Инициализация. Физиологические ограничения:

Для отведений в конечностях (I, II, III, aVR, aVL, aVF) элементы матрицы T задаются так, чтобы выполнялись законы Кирхгофа и формулы для усиленных отведений:

$$I + III = II, aVR = -(I + II)/2, aVL = \frac{(I - III)}{2}, aVF = (II + III)/2.$$

Эти соотношения задают подматрицу T для первых 6 строк, соответствующих отведениям на конечности.

Для грудных отведений (V1–V6) элементы матрицы подбираются для моделирования плавного перехода морфологии QRS-комплекса (например, от rS в V1 к

qR в V6). Это основано на анатомическом расположении электродов и ориентации главного вектора возбуждения.

Эмпирическая инициализация:

Начальные значения элементов T могут быть заданы на основе стандартных угловых проекций электрического поля сердца, описанных в литературе

Например, для $k = 3$ базисных сигналов, соответствующих активности нижней стенки, боковой стенки и межжелудочковой перегородки, элементы T инициализируются с учетом весов, отражающих вклад каждого базиса в конкретное отведение.

Оптимизация. После инициализации матрица T оптимизируется в процессе обучения на наборе данных PhysioNet PTB-XL с использованием градиентного спуска и функции потерь: $L = \alpha \cdot \mathcal{L}_{\text{MSE}} + (1 - \alpha) \mathcal{L}_{\text{cos}}$, $\mathcal{L}_{\text{MSE}}$ – среднеквадратичная ошибка, а $\mathcal{L}_{\text{cos}}$ – косинусное сходство. Для предотвращения переобучения применяется L2-регуляризация с коэффициентом $\lambda = 0,01$. Физиологические ограничения (например, законы Кирхгофа) включены как дополнительные условия в оптимизацию, чтобы обеспечить соблюдение физических зависимостей.

Пример структуры матрицы T для $k = 3$:

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{12,1} & t_{12,2} & t_{12,3} \end{bmatrix}.$$

где, например: $t_{1,1}$ (для отведения I) имеет высокий вклад от базисного сигнала, связанного с боковой стенкой левого желудочка. Элемент $t_{7,3}$ (для отведения V1) имеет высокий вклад от сигнала, связанного с межжелудочковой перегородкой.

Генерация коррелированного шума L . Матрица L используется для генерации коррелированного шума $N(t) = L \cdot W(t)$, где $W(t)$ – вектор белого шума. Она отражает корреляционную структуру между каналами, связанную с физической близостью электродов и общими источниками помех.

Инициализация матриц. Матрица L формируется на основе ковариационной матрицы C , где элементы c_{ij} зависят от «расстояния» между электродами i и j .

Ковариационная матрица C моделируется с учетом:

- Физической близости электродов: например, грудные отведения V1 и V2 имеют более высокую корреляцию, чем V1 и aVR, из-за их анатомической близости.
- Физиологических источников шума: Общие помехи, такие как мышечная активность или дыхательные артефакты, влияют на корреляцию между каналами.

- Для создания L использовано разложение Холецкого: $C = L \cdot L^T$ – нижняя треугольная матрица. Ковариационная матрица C задана на основе физических расстояний, а матрица L вычисляется через разложение Холецкого.

Таким образом, на начальном этапе параметры базисных сигналов, матрицы преобразования T и матрицы корреляции шума L задаются с учетом физиологических ограничений и эмпирических данных из клинических наборов, таких как PhysioNet PTB-XL. Параметры волн P, QRS, T инициализируются на основе нормальных распределений, матрица T – с учетом законов Кирхгофа и анатомических особенностей, а матрица L – через разложение Холецкого ковариационной матрицы. Эти параметры обеспечивают физиологическую достоверность сгенерированных ЭКГ-сигналов, но требуют оптимизации для сложных аритмий.

Элементы матрицы C могут быть заданы эмпирически, например: $c_{ij} = \sigma^2 \cdot \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{2l^2}\right)$, где d_{ij} – физическое расстояние между электродами i и j , σ^2 –

дисперсия шума (например, $0,01 \text{ мВ}^2$), l – параметр длины корреляции (например, 10 см).

Оптимизация. Параметры L оптимизируются в процессе обучения с использованием метода максимального правдоподобия, чтобы ковариационная структура сгенерированного шума соответствовала реальным ЭКГ-сигналам из РТВ-XL. Для 12 каналов L – нижняя треугольная матрица 12×12 , где ненулевые элементы отражают корреляции, например, более высокие значения для соседних грудных отведений.

Инициализация матрицы T . Начальные значения задаются с учетом физиологических ограничений, а затем оптимизируются.

Обучение модели. В процессе обучения модели применялся оптимизатор Adam с начальной скоростью обучения 1×10^{-4} , с затуханием 0,01 и batch = 32. Обучение проводилось в течение 100 эпох с ранней остановкой (patience = 10) на основе контроля ошибки валидации. Для предотвращения переобучения к элементам T применялась L2-регуляризация с коэффициентом $\lambda = 0,01$. Физиологические ограничения (например, законы Кирхгофа для конечностных отведений) включены в оптимизацию как дополнительные условия. Параметры матрицы L оптимизированы для соответствия ковариационной структуре реальных ЭКГ, используя максимальное правдоподобие. Обучение проводилось в облачной среде Colab Google на GPU T4, что сократило время обучения до 8 часов для 21,837 записей.

Метрики оценки качества генерируемых ЭКГ-сигналов. Качество генерируемых ЭКГ-сигналов оценивалось по следующим метрикам:

MSE: Среднеквадратичная ошибка измеряет среднее квадратичное отклонение между реальными и сгенерированными ЭКГ-сигналами, что позволяет оценить точность модели в терминах амплитудного соответствия:

$$\mathcal{L}_{\text{MSE}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|E_{12}^{(n)} - \hat{E}_{12}^{(n)}\|^2,$$

где N – количество записей в наборе данных, $E_{12}^{(n)} \in \mathbb{R}^{12 \times T}$ – реальный 12-канальный ЭКГ-сигнал для n -й записи, где T – количество временных отсчетов, $\hat{E}_{12}^{(n)} = T \cdot B^{(n)} + N^{(n)} \in \mathbb{R}^{12 \times T}$ – сгенерированный сигнал, полученный путем линейного преобразования базисных сигналов $B^{(n)}$ с добавлением коррелированного шума $N^{(n)}$. $\|\cdot\|^2$ – норма Фробениуса (или евклидова норма для векторизованных данных), которая вычисляется как сумма квадратов разностей элементов.

Косинусное сходство. Косинусное сходство $\mathcal{L}_{\text{cos}}$ оценивает морфологическое соответствие сигналов, фокусируясь на схожести их формы независимо от амплитуды. Косинусное сходство оценивает морфологическое соответствие между реальными и сгенерированными сигналами, фокусируясь на схожести формы сигналов, независимо от их амплитуды.

$$\mathcal{L}_{\text{cos}} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{E_{12}^{(n)} \cdot \hat{E}_{12}^{(n)}}{\|E_{12}^{(n)}\| \cdot \|\hat{E}_{12}^{(n)}\|},$$

где $E_{12}^{(n)} \cdot \hat{E}_{12}^{(n)}$ – скалярное произведение реального и сгенерированного сигналов, $\|E_{12}^{(n)}\|$, $\|\hat{E}_{12}^{(n)}\|$ – евклидовы нормы сигналов. Скалярное произведение и нормы вычисляются после векторизации сигналов (преобразования матриц $12 \times T$ в векторы длиной $12 \cdot T$).

Интерпретация. Значение $\mathcal{L}_{\text{cos}}$ близкое к 0 (например, $1 - 0,94 = 0,06$, как указано в результатах) указывает на высокое морфологическое сходство.

F1-score. Для классификации ритмов (нормальные и аритмии) с использованием классификатора, обученного на сгенерированных данных.

Эти метрики входят в комбинированную функцию потерь:

$\mathcal{L} = \alpha \mathcal{L}_{\text{MSE}} + (1 - \alpha) \mathcal{L}_{\text{cos}}$, где α – гиперпараметр модели, обеспечивающий баланс между точностью амплитуд и морфологическим соответствием. Ниже приведено подробное описание вычисления каждой метрики.

Комбинированная функция потерь:

– $\mathcal{L}_{\text{MSE}}$ обеспечивает точность в амплитудах, что важно для физиологической достоверности.

– $\mathcal{L}_{\text{cos}}$ гарантирует сохранение формы сигналов, что критично для диагностики, так как морфология волн (например, QRS-комплекса) имеет ключевое значение для выявления патологий.

Результаты

После обучения модель была протестирована на тестовой выборке набора PhysioNet PTB-XL и достигла следующих метрик: MSE = 0,015, косинусное сходство = 0,94, F1-score: нормальные ритмы = 0,88, аритмии (фибрилляция предсердий, блокады) = 0,82. В Таблице 1 представлены основные результаты обучения.

Таблица 1 – Метрики производительности моделей генерации ЭКГ-сигналов на тестовой выборке набора PhysioNet PTB-XL

Table 1 – Performance metrics of ECG signal generation models on the physionet PTB-XL test set

Модель	MSE	Косинусное сходство	F1-score (нормальные)	F1-score (аритмии)	Время генерации, (мс)
LSTM-CNN [13]	0,043	0,85	0,75	0,65	150
VAE [8]	0,040	0,87	0,78	0,68	200
GAN [9]	0,035	0,88	0,80	0,70	250
Diffecg [10]	0,022	0,90	0,85	0,78	–
2D GAN [14]	–	–	0,90	0,81	–
Предложенная	0,015	0,94	0,88	0,82	50

Примечание: «–» – авторы публикации не представили результатов по данному разделу Таблицы 1.

Анализ представленных в Таблице 1 значений метрик сгенерированных и реальных ЭКГ-сигналов показал высокую степень сходства, особенно для нормальных ритмов. 90 % сгенерированных ЭКГ оценены как реалистичные для нормальных ритмов и 75 % для аритмий. Основные расхождения наблюдались в сложных аритмиях, таких как желудочковая тахикардия, из-за ограниченной вариабельности базисных сигналов.

Абляционное исследование. Для оценки вклада каждого компонента модели был проведен абляционный анализ, в ходе которого последовательно удалялись или модифицировались ключевые элементы архитектуры. Эксперименты проводились на тестовой выборке из PhysioNet PTB-XL.

Таблица 2 – Абляционное исследование модели
Table 2 – Ablation study of the model

Конфигурация	MSE	Косинусное сходство	F1-score (нормальные)	F1-score (аритмии)	Время обучения, (часы)	Память, (ГБ)
Полная модель	0,015	0,94	0,88	0,82	8,0	2,5
Без коррелированного шума	0,020	0,90	0,85	0,78	7,5	2,3
Без физиологических ограничений	0,025	0,88	0,82	0,75	7,8	2,4
Без L2-регуляризации	0,022	0,89	0,84	0,77	8,2	2,5
Только базисные сигналы	0,030	0,85	0,80	0,70	7,0	2,0

Результаты абляционных исследований показали, что удаление коррелированного шума ухудшило реалистичность сигналов (MSE увеличился до 0.020). Исключение физиологических ограничений (законы Кирхгофа) снизило точность для отведений на конечности. Без L2-регуляризации модель переобучалась, что привело к снижению F1-score. Использование только базисных сигналов без преобразования привело к наихудшим результатам.

Обсуждение

Предложенная математическая модель для генерации 12-канальных ЭКГ продемонстрировала значительные преимущества в учете пространственных зависимостей между отведениями за счет линейного преобразования базисных сигналов и добавления коррелированного шума. Это обеспечило физиологическую согласованность сигналов, что особенно важно для имитации реальных клинических сценариев, где игнорирование межканальных корреляций может привести к артефактам. По сравнению с традиционными подходами, такими как LSTM-CNN, модель достигла более высокой точности (MSE = 0,015 против 0,045) и вычислительной эффективности (время генерации 50 мс, память 2,5 ГБ против 3,0 ГБ), что было подтверждено абляционным анализом и метриками на датасете PhysioNet PTB-XL.

В контексте современных исследований предложенная в статье модель выделяется своей интерпретируемостью, позволяющей явно контролировать параметры волн (P, QRS, T) и соблюдать физиологические ограничения, такие как законы Кирхгофа. Это контрастирует с «черными ящиками» глубокого обучения, такими как генеративные состязательные сети (GAN) и вариационные автоэнкодеры (VAE), которые, несмотря на высокое качество синтеза, страдают от нестабильности и потери морфологических деталей.

Однако необходимо отметить и ограничения подхода. Линейная природа модели может недостаточно точно захватывать сложные нелинейные взаимодействия, характерные для патологических состояний, что отражается в снижении F1-score для аритмий (0,82 против 0,88 для нормальных ритмов). В частности, модель демонстрирует трудности в генерации сложных аритмий, таких как полиморфная желудочковая тахикардия или фибрилляция предсердий с изменчивой морфологией волн. Абляционный анализ выявил ухудшение метрик без коррелированного шума

(MSE = 0,020) и физиологических ограничений (MSE = 0,025), подчеркивая их критичность.

Заключение

Предложенная модель представляет значительный прогресс в области генерации 12-канальных ЭКГ-сигналов, сочетая физиологическую точность, интерпретируемость и вычислительную эффективность. Учет пространственных зависимостей через матрицу преобразования и коррелированный шум обеспечивает создание клинически достоверных сигналов, превосходящих традиционные методы по ключевым метрикам.

Перспективы дальнейшего развития модели включают несколько направлений. Во-первых, переход от линейных к нелинейным преобразованиям с сохранением интерпретируемости, возможно, через использование параметризованных ядерных преобразований. Во-вторых, расширение набора базисных сигналов для сложных патологий через интеграцию с элементами бидоменной модели. В-третьих, разработка адаптивного механизма подстройки параметров под индивидуальные особенности пациентов.

Особенно перспективным представляется применение модели для создания сбалансированных обучающих наборов данных для систем ИИ-диагностики, где особенно важны гарантии физиологической достоверности и разнообразие патологических сценариев. Также модель может найти применение в системах телемедицинского мониторинга для синтеза эталонных сигналов и в медицинском образовании для создания интерактивных обучающих систем.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Franzone P.C., Pavarino L.F., Scacchi S. *Mathematical Cardiac Electrophysiology*. Cham: Springer; 2014. 397 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-04801-7>
2. Azuaje F., Clifford G., McSharry P. *Advanced Methods and Tools for ECG Data Analysis*. Boston, London: Artech House Publishers; 2006. 384 p.
3. Henriquez C.S. Simulating the Electrical Behavior of Cardiac Tissue Using the Bidomain Model. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*. 1993;21(1):1–77.
4. Jæger K.H., Tveito A. Deriving the Bidomain Model of Cardiac Electrophysiology from a Cell-Based Model; Properties and Comparisons. *Frontiers in Physiology*. 2022;12. <https://doi.org/10.3389/fphys.2021.811029>
5. Ebrahimi Z., Loni M., Daneshmand M., Gharehbaghi A. A Review on Deep Learning Methods for ECG Arrhythmia Classification. *Expert Systems with Applications: X*. 2020;7. <https://doi.org/10.1016/j.eswax.2020.100033>
6. Do E., Boynton J., Lee B.S., Lustgarten D. Data Augmentation for 12-Lead ECG Beat Classification. *SN Computer Science*. 2021;3(1). <https://doi.org/10.1007/s42979-021-00924-x>
7. Chen Sh., Meng Zh., Zhao Q. Electrocardiogram Recognition Based on Variational AutoEncoder. In: *Machine Learning and Biometrics*. 2018. <https://doi.org/10.5772/intechopen.76434>
8. Nishikimi R., Nakano M., Kashino K., Tsukada Sh. Variational Autoencoder-Based Neural Electrocardiogram Synthesis Trained by FEM-Based Heart Simulator. *Cardiovascular Digital Health Journal*. 2024;5(1):19–28. <https://doi.org/10.1016/j.cvdhj.2023.12.002>
9. Berger L., Haberbush M., Moscato F. Generative Adversarial Networks in Electrocardiogram Synthesis: Recent Developments and Challenges. *Artificial Intelligence in Medicine*. 2023;143. <https://doi.org/10.1016/j.artmed.2023.102632>

10. Neifar N., Ben-Hamadou A., Mdhaffar A., Jmaiel M. DiffECG: A Versatile Probabilistic Diffusion Model for ECG Signals Synthesis. In: *2024 IEEE/ACIS 22nd International Conference on Software Engineering Research, Management and Applications (SERA)*, 30 May – 01 June 2024, Honolulu, HI, USA. IEEE; 2024. P. 182–188. <https://doi.org/10.1109/SERA61261.2024.10685651>
11. Adib E., Fernandez A.S., Afghah F., Prevost J.J. Synthetic ECG Signal Generation Using Probabilistic Diffusion Models. *IEEE Access*. 2023;11:75818–75828. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3296542>
12. Zhang Yu-H., Babaeizadeh S. Synthesis of Standard 12-Lead Electrocardiograms Using Two-Dimensional Generative Adversarial Networks. *Journal of Electrocardiology*. 2021;69:6–14. <https://doi.org/10.1016/j.jelectrocard.2021.08.019>
13. Zhu F., Ye F., Fu Yu., Liu Q., Shen B. Electrocardiogram Generation with a Bidirectional LSTM-CNN Generative Adversarial Network. *Scientific Reports*. 2019;9. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-42516-z>
14. Ribeiro A.H., Ribeiro M.H., Paixão G.M.M., et al. Automatic Diagnosis of the 12-Lead ECG Using a Deep Neural Network. *Nature Communications*. 2020;11. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-15432-4>
15. Wagner P., Strodthoff N., Boussejot R.-D., et al. PTB-XL, a Large Publicly Available Electrocardiography Dataset. *Scientific Data*. 2020;7. <https://doi.org/10.1038/s41597-020-0495-6>
16. Mayourian J., Sobie E.A., Costa K.D. An Introduction to Computational Modeling of Cardiac Electrophysiology and Arrhythmogenicity. In: *Experimental Models of Cardiovascular Diseases: Methods and Protocols*. New York: Humana; 2018. P. 17–35. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-8597-5_2

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Щетинин Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация. **Evgeniy Yu. Shchetinin**, Doctor of Physico-mathematical Sciences, Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, the Russian Federation.

e-mail: riviera-molto@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22.08.2025; одобрена после рецензирования 18.09.2025; принята к публикации 27.09.2025.

The article was submitted 22.08.2025; approved after reviewing 18.09.2025; accepted for publication 27.09.2025.