

УДК 519.23; 303.717

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.49.2.022](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.49.2.022)

Алгоритмы и программы расчета непараметрических критериев проверки статистических гипотез на основе перестановок с повторениями

Л.В. Агамиров^{1,2,3}, В.Л. Агамиров^{1,2}, Н.В. Тутова¹✉, И.А. Андреев¹, Д.Д. Зиганшин²

¹Московский технический университет связи и информатики, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация

³Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация

Резюме. Одной из важных задач статистического анализа является проверка статистических гипотез, а в этой группе наиболее перспективной представляется подгруппа непараметрических ранговых критериев, весьма устойчивых для работы с малыми выборками, когда не представляется возможность достоверно обосновать гипотетический закон распределения. В свою очередь, это обстоятельство вызывает необходимость отказаться от асимптотических аппроксимаций и располагать точными критическими значениями критериев (или так называемыми в современной литературе *p-value*). В настоящее время аналитические решения имеются лишь для весьма ограниченного класса критериев (знаков, Уилкоксона, серий, Ансари-Брэдли). Для всех остальных, для точного решения, требуется компьютерный перебор огромного количества возможных перестановок рангов. Созданию универсального алгоритма для получения точного и быстрого распределения ранговых непараметрических критериев и посвящена настоящая работа. Алгоритм, реализованный на языках программирования с открытым исходным кодом *C++*, *Javascript* и *Python*, основан на известной задаче комбинаторики – перестановок с повторениями, с адаптацией его к задачам проверки гипотез ранговыми критериями. В качестве таких критериев рассмотрены критерии: Краскелла-Уоллиса, Муда, Лемана-Розенблатта, а также группа критериев нормальных меток: Фишера-Йетса, Кэйпона, Клотца, Ван-дер-Вардена. Алгоритм адаптирован и для других возможных ранговых задач непараметрической статистики.

Ключевые слова: проверка статистических гипотез, непараметрические критерии, ранговые критерии, точные распределения ранговых критериев, перестановки с повторениями, алгоритмы перестановки, программы *C++* для перестановок.

Для цитирования: Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Тутова Н.В., Андреев И.А., Зиганшин Д.Д. Алгоритмы и программы расчета непараметрических критериев проверки статистических гипотез на основе перестановок с повторениями. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1880> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.022

Algorithms and programs for calculating nonparametric criteria for statistical hypothesis testing based on permutations with repetitions

L.V. Agamirov^{1,2,3}, V.L. Agamirov^{1,2}, N.V. Toutova¹✉, I.A. Andreev¹, D.D. Ziganshin²

¹Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, the Russian Federation

²Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian Federation

³National Research University «MPEI», Moscow, the Russian Federation

Abstract. One of the important tasks of statistical analysis is to test statistical hypotheses, and in this group the most promising is the subgroup of nonparametric ranking criteria, which are very stable for work with small samples, when it is not possible to reliably justify the hypothetical law of distribution. In its turn, this fact causes the necessity to abandon asymptotic approximations and to have exact critical values of the criteria (or so-called *p-values* in modern literature). At present, analytical solutions are available only for a very limited class of criteria (signs, Wilcoxon, series, Ansari-Bradley). For all others, a computerized enumeration of a huge number of possible permutations of ranks is required for an exact solution. The creation of a universal algorithm for obtaining an accurate and fast distribution of ranks of nonparametric criteria is the focus of the present work. The algorithm, implemented in open-source programming languages *C++*, *Javascript* and *Python*, is based on a well-known combinatorics problem – permutations with repetitions, with its adaptation to the task of hypothesis testing by rank criteria. The following criteria are considered as such criteria: Kraskell-Wallis, Muda, Lehman-Rosenblatt, as well as a group of normal label criteria: Fisher-Yates, Capon, Klotz, Van der Varden. The algorithm is also adapted for other possible ranking problems of nonparametric statistics.

Keywords: statistical hypothesis testing, nonparametric criteria, rank criteria, exact distributions of rank criteria, permutations with repetitions, permutation algorithms, *C++* programs for permutations.

For citation: Agamirov L.V., Agamirov V.L., Toutova N.V., Andreev I.A., Ziganshin D.D. Algorithms and programs for calculating nonparametric criteria for statistical hypothesis testing based on permutations with repetitions. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(2). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1880> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.022

Введение

Расчет точных распределений ранговых непараметрических критериев проверки статистических гипотез при отсутствии аналитических решений является весьма трудоемкой с вычислительной точки зрения процедурой, так как требует генерации огромного числа всевозможных перестановок рангов [1]. В данной работе предлагаются алгоритмы и программы точного расчета распределений ранговых непараметрических критериев на основе алгоритма перестановок с повторениями, который представляет собой перебор всех возможных вариантов перестановок элементов выборочных совокупностей при некоторых условиях, ограничивающих количество этих вариантов, с последующим расчетом ранговых статистик и их накопленных частот. Рассматриваемый алгоритм предназначен для критериев, в которых вычисляются выборочные ранговые статистики.

Материалы и методы

Некоторые решения рассматривались авторами в работе [2], в которой применялся программный метод генерации перестановок путем создания вложенных циклов, число которых напрямую связано с общим количеством наблюдений во всех выборках. Данный метод является достаточно прямолинейным хотя и эффективным с точки зрения временных затрат. В некоторых случаях доступны приближения, но они часто неудовлетворительны, когда выборки малы или число связей велико. Некоторые существующие таблицы точных критических значений содержат ошибки и ограничены малыми выборками. В работе [3] предлагается рекурсивный алгоритм для вычисления точных значений *p-value* путем создания производящей функции частот для нулевого распределения статистики. Для значительного сокращения времени вычислений используется несколько методов. В [1] обсуждается, когда использовать тот или иной метод (точный, нормальное приближение или моделирование) для вычисления значений *p-value* или критических значений. В работах [4, 5] расширяются существующие таблицы точного распределения статистики Краскела-Уоллиса и сравниваются различные методы аппроксимации. Техника Ван де Виля [3, 6] деления

объединенного рейтинга на верхний и нижний ранги сочетается с рекурсивными алгоритмами для нахождения совместного распределения сумм рангов для каждой выборки. Затем генерируется распределение статистики Краскела-Уоллиса. В работах [7, 8] показано, что известная аппроксимация вероятностных точек Краскела-Уоллиса с помощью хи-квадрата является чрезмерно консервативной. Предлагаемые методы [1] обеспечивают лучшие аппроксимации, чем приближение хи-квадрат. В работах [9, 10] рассматривается точное распределение статистики Манна-Уитни для малых выборок. Алгоритм, описанный в работе, может быть неэффективным для больших выборок, поскольку время выполнения расчетов увеличивается экспоненциально с ростом объема данных. В [11] рассмотрены математическая постановка задачи, алгоритм, программа и примеры расчета непараметрического критерия Манна-Уитни. Для проведения исследований использованы электронные таблицы *MS Excell* и язык программирования *VBА*. Приводится компьютерная программа, позволяющая пользователям автоматически обрабатывать данные непараметрическими методами математической статистики, непредусмотренными в *MS Excell*. Имеется исходный текст разработанной программы. В перечисленных работах в основном изучаются методы генерации точных распределений для различных непараметрических критериев и их применение в практических задачах. Отмечается ограниченность в применении для больших выборок данных. Аналитические решения, предпочтительные во всех отношениях и основанные, главным образом, на производящих частотных функциях и на символической алгебре с применением соответствующих специализированных пакетов типа *Mathematica*.

Решение проблемы программной реализации точных распределений ранговых статистических критериев связано с разработкой алгоритмов и программных решений для улучшения вычислений в области статистических тестов, особенно когда точные таблицы или аналитические решения для распределений недоступны или трудоемки. Исследования проводились прежде всего в направлении создания рекурсивных и симуляционных алгоритмов, позволяющих генерировать точные распределения с использованием методов динамического программирования или других подходов для ускорения вычислений. Важным направлением является применение метода Монте-Карло для генерации точных распределений в сложных случаях. Отмечается [1], что метод Монте-Карло следует использовать, когда затруднительно рассчитать *p-value* иными способами. Появились попытки оптимизации вычислений для точных распределений с использованием многозадачности и параллельных вычислений, позволяющих значительно ускорить процессы для больших наборов данных, что делает возможным использование точных методов для реальных задач с большим объемом данных. Разрабатывались также достаточно редкие методы программной реализации аналитического расчета точных распределений ранговых критериев, которые выполняются практически мгновенно и не зависят от размера выборочных совокупностей.

Для анализа существующих компьютерных реализаций точного распределения ранговых критериев можно выделить следующие программные комплексы:

1. Пакет «*exactRankTests*» для языка R^1 . Данный пакет использует открытые лицензии, Пакет рассчитан на точный расчет *p-value*, что оптимально для небольших выборок с учетом связей между данными. Также данный пакет использует оригинальный метод сдвига (*Shift Algorithm*), предложенный Штрайтбергом и Ремелем [12], который оптимизирует процесс расчета точного распределения, особенно при умеренных объемах данных. В то же время пакет использует устаревшие алгоритмы,

¹ cran/exactRankTests. GitHub. URL: <https://github.com/cran/exactRankTests> (дата обращения: 03.04.2025).

производительность и точность могут снижаться при большом количестве связей в данных.

2. Модуль *Exact Tests* в IBM SPSS². Описание критериев можно найти в [13]³. Это коммерческое решение от компании IBM, с широким набором тестов, дистрибутивами под разные ОС (включая *macOS*). Модуль обеспечивает точные расчеты *p-value* для различных статистических тестов, что делает его особенно полезным для небольших выборок или данных с большими связями. Поддерживает множество непараметрических тестов, включая критерии Манна-Уитни, Уилкоксона, критерий знаков и другие. Отметим, что это дорогое коммерческое решение, с закрытым исходным кодом, плюс закрытое санкциями для РФ. Модуль не интегрируется с открытыми системами, такими как *Python*, *R* и другими платформами анализа данных.

3. Модули и библиотеки *R* и *Python*. Встроенная в *Python* библиотека *SciPy* включает широкий набор непараметрических тестов, таких как критерий Манна-Уитни, критерий Уилкоксона и другие. Поддерживает непараметрические критерии с точными *p-value* (начиная с версии *SciPy* 1.7 для некоторых тестов, например, Манна-Уитни).

4. Внешний модуль *exact-pvalues* – специализированный пакет для точного расчета *p-value* для небольших выборок. Использует комбинаторные алгоритмы для вычисления точного распределения. Библиотека *rpy2* (Интеграция *R* в *Python*) – представляет собой интерфейс для работы с *R* внутри *Python*. Если нужно напрямую использовать *exactRankTests* в *Python*, *rpy2* предоставляет возможность вызывать функции из *R*.

Как показал анализ документации по этим пакетам, они основаны в значительной степени на алгоритмах и программах прикладной статистики в рамках проекта Royal Statistical Society «Applied Statistics algorithms», содержащего около 250 алгоритмов начиная с 1968 г. (проект завершился в 1997 г.), переведенных с языка Algol на Fortran, а затем, стараниями Джона Буркардта (John Burkardt) на C++⁴.

Существующие платные статистические пакеты Statistica, STADIA и другие представляют собой исполняемый модуль с расширением «*exe*», поэтому алгоритмы реализации в этих пакетах статистик критериев, их распределений, включая *p-value*, установить невозможно, хотя они могут использоваться в результативной части для сравнения решений, наряду с существующими таблицами точных распределений. Указанные обстоятельства весьма затрудняют также достижение учебных целей, как в части более глубокого изучения методов статистического анализа, так и в части разработки алгоритмов программирования на современных языках C++, *Python*, *Javascript*.

С этой целью в настоящей работе предлагаются собственные программные разработки авторов для расчета точных распределений непараметрических ранговых критериев на основе одного из возможных методов реализации задачи: универсального алгоритма перестановок с повторениями, применимого для любых ранговых критериев, который представляет собой перебор всех возможных вариантов перестановок элементов выборки при некоторых условиях, ограничивающих количество этих вариантов, с последующим расчетом ранговых статистик и их накопленных частот.

Как отмечалось выше, существуют также аналитические решения, такие как рекурсивные алгоритмы, производящие функции частот, методы символической алгебры, метод Монте-Карло, которые в данной работе не рассматриваются из-за ограниченности объемов публикации.

² IBM SPSS software. IBM. URL: <https://www.ibm.com/spss> (дата обращения: 03.04.2025).

³ Агамиров Л.В. *Методы статистического анализа механических испытаний*. Москва: Интермет Инжиниринг; 2004. 127 с.

⁴ C++ Source Codes. URL: https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/cpp_src.html (дата обращения: 03.04.2025).

Реализация перестановок с повторениями является известной задачей комбинаторики [14, 15]. Часть программного кода на C++ представлена в Листинге 1, в которой жирным шрифтом отмечен основной элемент программы – алгоритм перестановки с повторениями. Перестановки рангов в программе реализуются с помощью вспомогательного генерирующего массива «*a*», в котором повторяются номера элементов для каждой выборки. Например, для трех выборок размерами 2,3,4, начальные значения массива «*a*» будут иметь вид: [1,1,2,2,2,3,3,3,3], которые в процессе работы программы переставляются и формируют выходной вектор перестановок «*h*». Как правило, для большинства критериев, этот вектор содержит множество повторяющихся значений, которые фильтруются с помощью простейшего алгоритма быстрой сортировки и формирования частотной функции. Необходимо отметить, что применение встроенных методов, реализованных в библиотеках C++ для нахождения уникальных элементов, существенно увеличивает время расчета и поэтому от них пришлось отказаться. То же самое касается весьма компактных и элегантных решений с применением встроенной библиотеки *itertools Python – more_itertools import distinct_permutations*, которые не идут ни в какое сравнение по быстродействию с решениями на C++ даже с учетом включения параллельного алгоритма и привлечения модуля *cython*. Возможно, в будущем эта проблема для *Python* будет решена.

```

int k // количество выборок
int m[k] //массив элементов в выборках размерности k
string crit //имя критерия
vector<double>h //выходной вектор перестановок
vector <double>wrange //выходной вектор статистик критерия
vector <double>pw //выходной вектор вероятностей распределения
int kk, j, l, r;
double z;
long int num;
n=0;
for(i=0;i<k;i++) n+=m[i];
a=new int[n+1];
km=0;
for(i=0;i<k;i++) {
for(j=0;j<m[i];j++) a[j+km]=i+1;
km=km+m[i];
num=0;
while(1>0) {
j=n-2;
while (j>=0 && a[j]>=a[j + 1]) j--;
if (j<0) return num;
kk=n-1;
while (a[j]>=a[kk]) kk--;
swap(a[j], a[kk]);
l=j+1; r=n-1;
while (l<r) swap(a[l++], a[r--]);
num++;
z=crit(a,k,n,m);
h.push_back(z);
}
}
////////////////////////////////////
//Сортировка вектора перестановок h, объединение повторяющихся значений h и расчет значений
векторов wrange //и pw
sort(h.begin(),h.end())
nn=0;nnew=0;s=0;
for(i=0;i<num;i++) {
if (h[i]==h[i+1]) {

```

```

    nnew++;
}
else {
    pw.push_back(nnew+1);
    wrange.push_back(h[i]);
    nn++;nnew=0;
}
}
for(i=0;i<nn;i++) {
    s+=pw[i]/double(num);
    pw[i]=s;
}

```

Листинг 1 – Программа реализации перестановок с повторениями на C++
 Listing 1 – C++ implementation of permutations with repetitions

Реализованный алгоритм может быть применен для всех ранговых критериев и является вполне эффективным для двух выборочных критериев, но для k -выборочных критериев типа Краскела-Уоллиса требует значительных затрат машинного времени из-за огромного числа вариантов перестановок рангов. Полный код перестановок с повторениями на C++, JavaScript и Python представлен в *github*-репозитории авторов⁵. Там же имеются коды вспомогательных программ обратного нормального распределения (*invnormaldistribution*) и математических ожиданий и ковариаций нормальных порядковых статистик (*ordern*), необходимых для реализации критериев нормальных меток.

В программах на основе единого алгоритма перестановок с повторениями рассчитываются точные распределения непараметрических критериев сдвига: Уилкоксона, Лемана-Розенבלата, Краскела-Уоллиса, критериев масштаба: Ансари-Брэдли, Муда, а также критериев нормальных меток: Кейпона, Фишера-Йетса, Клотца, Ван-дер-Вардена. В программах также содержатся коды для аналитического расчета точных распределений критериев, для которых он существует (критерии Уилкоксона, Ансари-Брэдли, серий). Алгоритм может быть использован и для других ранговых критериев проверки статистических гипотез. Общая схема расчетов полностью соответствует Листингу 1, следует лишь заменить строку $z=crit(a,k,n,m)$ на строку расчета соответствующего критерия. Реализация статистики рангового критерия Муда с помощью генерирующего массива « a » приведена в Листинге 2. Программный код для остальных критериев можно найти в файле *stat.h* в указанном *github*-репозитории.

```

double moodstatistic(int*a, int kx,int n,int*m) {
    int i, msmal;
    double r;
    msmal=2;
    if (m[0]<m[1]) msmal=1;
    r=0;
    for (i=0; i<n; i++) if (a[i]==msmal) r+=pow((i+1.-(n+1.)/2.),2);
    return r;
}

```

Листинг 2 – Функция расчета статистики рангового критерия Муда на C++
 Listing 2 – Function for calculating the Mood rank criterion statistics in C++

Весьма эффективным способом проверки k -выборочной гипотезы является попарное сравнение выборок по критерию Уилкоксона с вычислением точных критических значений.

⁵ AVL095/rank: Program for calculating rank nonparametric criteria. GitHub. URL: <https://github.com/AVL095/rank> (дата обращения: 03.04.2025).

Результаты

Рассмотрим время выполнения наиболее длительной задачи точного распределения k -выборочного критерия Краскелла-Уоллиса в *C++ Visual Studio 2022* (Таблица 1).

Эксперименты выполнялись на компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel(R) Core(TM) i7-2630QM CPU @ 2.00GHz, оперативная память 8,00 ГБ, тип системы 64-разрядная операционная система, процессор $\times 64$).

Расчеты выполнялись также на *Javascript* и *Python*, но результаты здесь не приводятся вследствие значительно более длительного времени выполнения программ.

Таблица 1 – Затраты времени на точный расчет критерия Краскелла-Уоллиса перестановкой с повторениями для количества выборок $k=4$

Table 1 – Time costs for exact calculation of the Kruskal-Wallis test by permutation with repetitions for the number of samples $k=4$

№	Выборка	Общее количество повторений nm (1)	Размер вектора функции распределения np	Время расчета критерия (сек)	Время сортировки (сек)	Суммарное время (сек)
1	3, 4, 4, 4	15765750	1166	12,953	2,063	15,016
2	3, 4, 4, 5	50450400	3280	42,31	7,75	50,06

Обсуждение

Таким образом, разработанный алгоритм, являющийся реализацией метода перестановок с повторениями, может быть использован для решения задачи проверки статистических гипотез, связанной с точным определением критических значений или p -value ранговых критериев. Учитывая, что для большинства ранговых критериев определение точных распределений является сложной задачей с математической и вычислительной точек зрения, представленная в работе методика генерации точных распределений критериев средствами компьютерной комбинаторики является эффективным решением.

Выбор кода на *Javascript* связан с его доступностью, простотой реализации без установки специальных программных пакетов, легкостью перевода на *C++*, *Java* и другие алгоритмические языки. В приведенной выше ссылке содержатся в открытом доступе коды на *Javascript*, *C++*, *Python*.

Заключение

1. Рассмотрены алгоритмы и разработаны программы точного расчета распределений ранговых непараметрических критериев на основе алгоритма перестановок с повторениями.

2. Данный алгоритм предполагает генерацию последовательности при ограничении перестановок связанных элементов с последующим расчетом статистик для каждой последовательности, фильтрации и сортировки последовательностей с целью формирования уникальных значений и их накопленных частот.

3. Разработанный алгоритм, являющийся реализацией метода перестановок с повторениями, может использоваться для решения задач проверки статистических гипотез, связанных с точным определением критических значений или p -value ранговых критериев.

4. Разработанные алгоритмы и программы с открытым кодом на *Javascript*, *C++*

и *Python* показали безусловный приоритет *C++* в плане быстродействия выполнения расчетов, которое является главной проблемой при расчете точного распределения ранговых критериев.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Mehta C.R., Patel N.R. *IBM SPSS Exact Tests*. IBM Corp.; 2013. 226 p.
2. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Численные методы и алгоритмы расчета точных распределений непараметрических критериев проверки статистических гипотез. *Вестник Московского авиационного института*. 2013;20(4):212–218.
Agamirov L.V., Agamirov V.L., Vestyak V.A. Numerical Methods and Algorithms of Calculation of Exact Distributions of Non-Parametrical Criteria Statistical Hypotheses. *Aerospace MAI Journal*. 2013;20(4):212–218. (In Russ.).
3. Van de Wiel M.A. The Probability Generating Function of the Freund-Ansari-Bradley Statistic. In: *Memorandum COSOR: Volume 9711*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven; 1997. 9 p.
4. Choi W., Lee J.W., Huh M.-H., Kang S.-H. An Algorithm for Computing the Exact Distribution of the Kruskal-Wallis Test. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 2003;32(4):1029–1040. <https://doi.org/10.1081/SAC-120023876>
5. Meyer J.P., Seaman M.A. A Comparison of the Exact Kruskal-Wallis Distribution to Asymptotic Approximations for All Sample Sizes up to 105. *The Journal of Experimental Education*. 2013;81(2):139–156. <https://doi.org/10.1080/00220973.2012.699904>
6. Van de Wiel M.A. Exact Distributions of Multiple Comparisons Rank Statistics. *Journal of the American Statistical Association*. 2002;97(460):1081–1089. <https://doi.org/10.1198/016214502388618898>
7. Odiase J.I., Ogbonmwan S.M. JMASM20: Exact Permutation Critical Values for The Kruskal-Wallis One-Way ANOVA. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. 2005;4(2). <https://doi.org/0.22237/jmasm/1130804820>
8. Spurrier J.D. On the Null Distribution of the Kruskal-Wallis Statistic. *Journal of Nonparametric Statistics*. 2003;15(6):685–691. <https://doi.org/10.1080/10485250310001634719>
9. Divine G.W., Norton H.J., Barón A.E., Juarez-Colunga E. The Wilcoxon-Mann-Whitney Procedure Fails as a Test of Medians. *The American Statistician*. 2018;72(3):278–286. <https://doi.org/10.1080/00031305.2017.1305291>
10. Hothorn T., Hornik K., van de Wiel M.A., Zeileis A. Implementing a Class of Permutation Tests: The Coin Package. *Journal of Statistical Software*. 2008;28(8):1–23. <https://doi.org/10.18637/jss.v028.i08>
11. Антипина Н.М., Захаров В.Н., Протасов Ю.М., Юров В.М. Непараметрический критерий различия для двух связанных выборок в табличном редакторе MS Excel. *Вестник Московского государственного областного университета Серия: Экономика*. 2021;(2):47–55.
Antipina N.M., Zakharov V.N., Protasov Yu.M., Yurov V.M. Non-Parametric Criterion of Difference for Two Related Samples in Table Editor MS Excel. *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics*. 2021;(2):47–55. (In Russ.).
12. Streitberg B., Rohmel J. Exact Distributions for Permutation and Rank Tests: An Introduction to Some Recently Published Algorithms. *Statistical Software Newsletter*. 1986;12(1):10–17.
13. Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников*. Москва: ФИЗМАТЛИТ; 2006. 816 с.

14. Pollard J.H. *A Handbook of Numerical and Statistical Techniques: With Examples Mainly from the Life Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 1977. 349 p.
15. Липский В. *Комбинаторика для программистов*. Москва: Мир; 1988. 213 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Агамиров Левон Владимирович, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Московский технический университет связи и информатики, Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация.

e-mail: itno_agamirov@mail.ru

ORCID: [0009-0009-6909-9399](https://orcid.org/0009-0009-6909-9399)

Levon V. Agamirov, Doctor of Engineering Sciences, Professor, National Research University "MPEI", Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian Federation.

Агамиров Владимир Леонович, кандидат технических наук, доцент, Московский технический университет связи и информатики, Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация.

e-mail: avhere@yandex.ru

ORCID: [0000-0001-9181-7726](https://orcid.org/0000-0001-9181-7726)

Vladimir L. Agamirov, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian Federation.

Тугова Наталья Владимировна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Бизнес-информатика» Московского технического университета связи и информатики, Москва, Российская Федерация.

e-mail: e-natasha@mail.ru

ORCID: [0000-0002-2851-8472](https://orcid.org/0000-0002-2851-8472)

Natalia V. Toutova, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Head of the Department of Business Informatics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, the Russian Federation.

Андреев Илья Александрович, кандидат экономических наук, доцент, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Российская Федерация.

e-mail: i.a.andreev@mtuci.ru

ORCID: [0009-0000-8988-3097](https://orcid.org/0009-0000-8988-3097)

Ilya A. Andreev, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, the Russian Federation.

Зиганшин Джамиль Дамирович, студент, Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация.

email: klafovich@gmail.com

ORCID: [0009-0000-7117-5375](https://orcid.org/0009-0000-7117-5375)

Dzhamil D. Ziganshin, student, Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 05.04.2025; одобрена после рецензирования 30.04.2025; принята к публикации 14.05.2025.

The article was submitted 05.04.2025; approved after reviewing 30.04.2025; accepted for publication 14.05.2025.