

УДК 519.86

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.48.1.041](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.48.1.041)

Сетевое планирование и ресурсная оптимизация проекта в условиях нечеткого группового экспертного оценивания длительности выполнения работ

Т.В. Азарнова¹✉, Н.Г. Аснина², Ю.В. Бондаренко¹, И.О. Сорокина¹

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

²Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация

Резюме. В статье представлен алгоритм расчета временных параметров и ресурсной оптимизации сетевого графа, длины работ которого оцениваются экспертной группой в виде нечетких треугольных чисел. Чтобы учесть вариацию экспертных оценок, результаты экспертизы сначала обобщаются в виде нечетких интервально-значных чисел и затем на основе коэффициента риска лица, принимающего решение, преобразуются в нечеткие треугольные числа. Применение нечетких интервально-значных чисел позволяет учесть не только неопределенность мнений экспертов относительно длительности работ, но и расхождения в мнении экспертов при формировании функции принадлежности нечетких треугольных чисел. В основе алгоритма сетевого планирования в условиях задания длительности работ в виде нечетких треугольных чисел лежит классический алгоритм нахождения критического пути с использованием специальных методов вычисления ранних и поздних времен свершения событий. Вместо операций взятия максимума и минимума при нахождении ранних и поздних времен свершения событий используется вероятностное сравнение нечетких чисел. На основе вычисленных нечетких треугольных оценок раннего и позднего свершения событий вычисляются нечеткие оценки ранних и поздних моментов начала и завершения каждой работы и вероятности выполнения каждой работы в каждый момент времени. Полученные вероятности позволяют оценить ресурсную обеспеченность проекта в любой момент времени. В работе также предложена математическая модель оптимизации ресурсной обеспеченности проекта за счет сдвигов начала каждой работы в пределах раннего и позднего начала.

Ключевые слова: сетевой граф проекта, нечеткое треугольное и интервально-значное представление, длительность выполнения работ проекта, нечеткие временные параметры работ проекта, ресурсная оптимизация проекта.

Для цитирования: Азарнова Т.В., Аснина Н.Г., Бондаренко Ю.В., Сорокина И.О. Сетевое планирование и ресурсная оптимизация проекта в условиях нечеткого группового экспертного оценивания длительности выполнения работ. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(1). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1861> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.041

Network planning and resource optimization of a project in conditions of fuzzy group expert assessment of the duration of work

T.V. Azarnova¹✉, N.G. Asnina², Yu.V. Bondarenko¹, I.O. Sorokina¹

¹Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation

²Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation

Abstract. This article presents an algorithm for calculating time parameters and resource optimization of a network graph, the lengths of which are estimated by an expert group in the form of fuzzy triangular

numbers. To account for the variation in expert assessments, the examination results are first summarized as fuzzy interval-digit numbers and then converted into fuzzy triangular numbers based on the risk factor of the decision maker. The use of fuzzy interval-valued numbers allows not only to take into account the uncertainty of expert opinions regarding the duration of work, but also the differences in expert opinion when forming the membership function of fuzzy triangular numbers. The network planning algorithm is based on the classical algorithm for finding the critical path using special methods for calculating the early and late times of events when setting the duration of work in the form of fuzzy triangular numbers. Instead of taking the maximum and minimum operations when finding the early and late times of events, a probabilistic comparison of fuzzy numbers is used. Based on the calculated fuzzy triangular estimates of the early and late completion of events, fuzzy estimates of the early and late moments of the start and completion of each job and the probability of each job being completed at each time are calculated. The probabilities obtained allow us to estimate the resource availability of the project at any given time. The paper also proposes a mathematical model for optimizing the resource availability of a project due to shifts in the beginning of each work within the early and late start.

Keywords: network graph of the project, fuzzy triangular and interval-valued representation, duration of the project work, fuzzy time parameters of the project work, resource optimization of the project.

For citation: Azarnova T.V., Asnina N.G., Bondarenko Yu.V., Sorokina I.O. Network planning and resource optimization of a project in conditions of fuzzy group expert assessment of the duration of work. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(1). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1861> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.041

Введение

Проекты, реализуемые в реальном секторе экономики, подвержены влиянию различных факторов неопределенности, которые могут уточняться только в процессе выполнения проекта. При разработке сетевого плана выполнения проекта эти факторы должны обязательно учитываться, а также должны планироваться временные, трудовые и другие виды ресурсов, которые будут сглаживать последствия влияния факторов неопределенности на проект.

К фундаментальным подходам планирования в условиях неопределенности относятся такие подходы, как реактивное, стохастическое и нечеткое планирование [1]. При использовании подхода реактивного планирования исследователи не пытаются избавиться от неопределенности, при отходе графика выполнения работ от запланированного базового графика они концентрируют внимание на оптимизации усилий по восстановлению запланированного расписания. В процессе реактивного планирования можно использовать разные стратегии, например, часто применяется метод правого сдвига, в соответствии с которым все невыполненные задачи передвигаются вправо в той последовательности, как было запланировано первоначально, время выполнения проекта увеличивается.

В соответствии с другой стратегией реактивного планирования осуществляется перепланирование с того момента, когда было обнаружено отклонение от плана. Перепланирование может осуществляться относительно некоторого критерия эффективности, возможно с другими ресурсами. В качестве критериев эффективности могут рассматриваться: минимизация суммы отклонений времени выполнения всех задач от их первоначально запланированных времен начала и минимизация количества скорректированных задач.

В [2] рассматривается ситуация, когда в многопроектной, многорежимной среде в базовый график необходимо вставить новую внеплановую задачу так, чтобы минимизировать максимальную задержку выполнения плановых задач. Для решения данной проблемы осуществляется перепланирование с использованием пошаговой процедуры создания набора доминирующих «разрезов вставки». Из доминирующих

разрезов вставки выбирается оптимальный и определяется подмножество дуг вставки для новой задачи.

Достаточно часто на практике используется многошаговый подход к созданию базового расписания. На первом шаге создается детерминированное расписание без учета возможных изменений, которые могут возникнуть во время выполнения проекта, затем на втором шаге осуществляется прогнозирование возможных изменений и оценка их влияния на график выполнения, на третьем шаге осуществляется устойчивое и упреждающее планирование с учетом возможных изменений. Данный подход может базироваться на использовании информации о конкретных характеристиках изменчивости (например, о распределении вероятностей длительности задач) или планировании реактивных изменений, которые будут соблюдаться во время выполнения проекта. Как правило, цель подобного планирования состоит в минимизации функции отклонения между детерминированным и получаемым с учетом изменений графиком, оно фокусируется на ожидаемой стабильности. План считается гибким, если его можно легко восстановить, т. е. превратить в новый качественный план.

Стохастическому планированию посвящено также достаточно много исследований в области проектного менеджмента. Задача стохастического планирования проектов с ограниченными ресурсами направлена в основном на учет неопределенной продолжительности выполнения задач проекта, которая моделируется в виде случайных величин. В качестве критерия эффективности процедуры планирования рассматривается минимизация ожидаемой продолжительности проекта или минимизация количества привлекаемых дополнительных возобновляемых ресурсов.

В условиях ограниченных ресурсов и случайной продолжительности выполнения задач расписание проектов создается посредством применения так называемых политик планирования. Применение политик планирования в определенный момент времени состоит в том, чтобы выполнить в данный момент времени набор действий в соответствии с их приоритетом и ресурсами, опираясь на информацию, которая стала доступной к данному моменту. Требуется создать политики, которые минимизируют ожидаемую продолжительность проекта. В работах [3–4] для достижения данной цели составляется оптимизационная задача, при решении которой применяется многоэтапное стохастическое программирование. Полная характеристика возможных политик приведена в [5].

Политика раннего старта ES базируется на концепции минимальных запрещенных наборов попарных действий, не связанных с приоритетом, которые нельзя планировать одновременно, поскольку они используют ограниченные ресурсы. Политика является ES-политикой, если для каждого минимального запрещенного множества F существуют пары $(i, j), i, j \in F$, такие, что для каждой последовательности задач d задача j не может быть запущена раньше, чем закончится i .

Политика предварительного отбора PRS базируется на том, что для каждого минимального запрещенного набора F существует действие $j \in F$ (предварительно выбранное или ожидающее действие), такое, что для каждой последовательности действий d задача j не начинается по крайней мере до завершения одного действия $i \in F \setminus \{j\}$. Политики предварительного отбора могут задаваться с помощью так называемых условий ожидания, моделируемых как ограничения приоритета И / ИЛИ. Линейные политики предварительного отбора LIN базируются на выборе по приоритету L действий таким образом, что заранее выбранное ожидающее действие минимального запрещенного набора F является действием с наименьшим приоритетом.

Политикой, основанной на заданиях JBP, является политика, которая характеризуется тем, что самое раннее время начала действия может быть вычислено

путем запуска каждого действия в порядке, заданном приоритетами L. В работе [6] реализован алгоритм ветвей и границ для вычисления оптимальных ES, PRS, LIN и JBP-политик. Тестирование алгоритма осуществляется на примерах, созданных с помощью специального генератора задач ProGen. Хорошие результаты показали политики предварительного отбора.

Широкое распространение при решении стохастических задач планирования проектов получили различные эвристические процедуры.

В работах [7–8] рассматривают сетевые графы, в которых продолжительность задач является случайной величиной, имеющей распределение бета, равномерное или нормальное распределения. Предполагается, что для реализации задач проекта требуются возобновляемые ресурсы, доступные в постоянном количестве на протяжении периода реализации проекта.

Целью моделирования является минимизация ожидаемой продолжительности проекта. В процессе реализации задач проекта конкуренция за ресурсы разрешается путем решения задачи целочисленного программирования, максимизирующей общий вклад рассматриваемых задач в ожидаемую продолжительность проекта. Для каждой задачи ее вклад рассчитывается как произведение его средней продолжительности и вероятности ее нахождения на критическом пути.

В работах [9–10] применяется бета-распределение для моделирования длительности выполнения задач проекта и используются оптимистические, наиболее вероятные и пессимистические оценки параметров бета-распределения. Начальное решение находится с помощью правила минимального резерва, продолжительность каждого действия генерируется из найденного бета-распределения, исходя из сгенерированных значений и имеющейся последовательности действий вычисляется продолжительность проекта. Такая процедура повторяется 100 раз, средняя продолжительность проекта для определенной последовательности указывается как ожидаемая продолжительность проекта.

В работе [11] моделируются стохастические перерывы в деятельности. Исследуется проблема планирования проектной деятельности в условиях ограниченности ресурсов, когда прерывания действий представлены случайными величинами. Такая ситуация может возникать в проектах, в которых некоторые задачи проходят процедуру утверждения. Авторы разработали сценарный подход. Сценарии генерируются путем указания трех оценок времени как для прерывания, так и последующей части каждого стохастического действия. Алгоритм решения представляет собой гибридный алгоритм, основанный на методологии анализа характеристик разброса значений.

Сложность использования стохастического подхода в планировании проектов заключается в том, что уникальность проектов не позволяет создать статистическую базу для определения распределения вероятностей длительности выполнения задач проекта. В управлении проектами достаточно часто прибегают к технологиям экспертного оценивания для определения длительности выполнения задач проекта. Экспертные оценки, особенно при групповом оценивании, характеризуются в большей степени неопределенностью, а неточностью, поэтому в данном случае рекомендуется вместо стохастических переменных для моделирования длительности выполнения задач проекта использовать нечеткие переменные.

В нечетком моделировании вместо плотности распределения используются функции принадлежности, в основе построения которых лежит теория возможностей. Сложность нечеткого моделирования связана во многом именно с построением функций принадлежности.

Один из практико-ориентированных способов построения функций принадлежности был предложен в работе [12], он базируется на выяснении в процессе экспертного опроса оптимистического и пессимистического значения анализируемой величины при некоторых уровнях уверенности (меры принадлежности) и применении полученных интервальных оценок для формирования функции принадлежности. Результатом нечеткого планирования, как правило, является нечеткое расписание, которое указывает нечеткое время начала и окончания для каждой задачи проекта. В работе [13] приводится интерпретация нечеткого графика, как инструмента оценки степени свободы плана, который позволяет лицу, принимающему решение, гибко подходить к установлению сроков начала определенных работ.

Исследование нечеткой модели планирования проектов с ограниченными ресурсами представлено в работе [14]. Авторы используют схемы последовательного и параллельного планирования на основе правил приоритета для работы с нечеткими параметрами. В работах [15–16] разработан подход нечеткого моделирования для планирования проектов по разработке продуктов, имеющих неточную временную информацию. Проект имеет нечеткую продолжительность работ и нечеткий крайний срок завершения, требуется определить время начала для каждого действия так, чтобы были соблюдены нечеткие ограничения времени выполнения, крайнего срока, приоритета и ресурсов. В работах [17–18] для определения нечетких времен начала действий используется процедура поиска, основанная на генерации групп действий, задержка которых способствует разрешению конфликтов ресурсов. На основе теории возможностей определяется точное время начала каждого действия, максимизирующее степень удовлетворения всех нечетких ограничений.

В статье [19] рассматривается использование нечеткой логики для поддержки оценки статуса проекта. Представлена нечеткая модель для оценки статуса проекта, которая базируется на двух специальных лингвистических индексах: индексе выполнения расписания (SPI) и индексе выполнения затрат (CPI). Лингвистический подход позволяет моделировать риск и неопределенность, свойственные реальным проектам.

Несмотря на большое количество работ в области оценки проектов на основе стохастического и нечеткого подхода, остаются проблемные точки, связанные и с моделированием нечетких и стохастических параметров проекта, и с организацией вычислительного процесса, и с использованием результатов моделирования в реальной практике проектного менеджмента.

Материалы и методы

В рамках данного исследования представлен еще один подход к моделированию параметров проекта, реализуемого в условиях риска и неопределенности, на базе представления временных параметров сетевого графа в виде нечетких треугольных и интервально-значных чисел. В работе описан алгоритм построения нечетких интервально-значных оценок длительности выполнения работ проекта на основе обобщения мнений экспертов, представленных нечеткими треугольными числами.

Также предложен алгоритм преобразования нечетких интервально-значных чисел в треугольные нечеткие числа с учетом позиции руководителя проекта; предложен алгоритм расчета ранних и поздних времен реализации событий, базирующийся на вероятностном ранжировании нечетких чисел и решении оптимизационных задач; предложен алгоритм расчета вероятности нахождения определенного момента времени между началом и завершением событий и работ и оценки ресурсного обеспечения работ на основе альфа-срезов данной вероятности.

Результаты

Алгоритм построения нечетких интервально-значных оценок длительности выполнения работ проекта на основе обобщения мнений экспертов

Рассмотрим процедуру обработки экспертных суждений для построения нечетких интервально-значных оценок длительности выполнения работ проекта. Предполагается, что экспертизу осуществляет группа, состоящая из k экспертов.

Шаг 1. Каждый эксперт дает оценку длительности выполнения каждой работы в виде нечеткого треугольного числа. В результате опроса k экспертов для каждой работы будет получено k нечетких чисел с треугольными функциями принадлежности:

$$A_i = (a_{Li}, a_{0i}, a_{Ri}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (1)$$

$$\mu_{A_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a_{Li} \\ 1 - \frac{a_{i0} - x}{a_{0i} - a_{Li}}, & \text{если } a_{Li} \leq x \leq a_{0i} \\ 1 - \frac{a_{i0} - x}{a_{0i} - a_{Li}}, & \text{если } a_{0i} \leq x \leq a_{Ri} \\ 0, & \text{если } x \geq a_{Ri} \end{cases}, \quad (2)$$

где a_{Li}, a_{Ri} – левая и правая границы носителя нечеткого треугольного числа, а a_{0i} – центральное значение.

Шаг 2. Для оценки согласованности мнений экспертов используется прием, который базируется на понятии четкого множества, ближайшего к нечеткому числу. Пусть дано нечеткое число A с мерой принадлежности $\mu_A(x)$, четким множеством, ближайшим к A , называют множество A_0 , характеристическая функция которого имеет вид:

$$\mu_{A_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(x) = 0,5 \end{cases}. \quad (3)$$

Для оценки показателя общей согласованности мнений экспертов относительно длительности выполнения конкретной работы, для нечетких треугольных чисел строятся ближайшие четкие множества $A_{0i}, i = \overline{1, k}$ и вычисляется величина:

$$\eta = \frac{|A_{01} \cap A_{02} \cap \dots \cap A_{0k}|}{|A_{01} \cup A_{02} \cup \dots \cup A_{0k}|}, \quad (4)$$

где знак $|H|$ обозначает суммарную длину всех частей множества H на числовой прямой. Если значение показателя общей согласованности больше или равно 0.7, то это говорит о том, что группа экспертов является хорошо согласованной. В противном случае необходимо воспользоваться процедурой исключения одного или нескольких экспертов из группы.

1. Для каждой пары экспертов k, l вычисляется показатель парной согласованности по формуле:

$$\eta_{lp} = \frac{|A_{0l} \cap A_{0p}|}{|A_{0l} \cup A_{0p}|}, \quad l, p = \overline{1, k}, l \neq p. \quad (5)$$

2. Отбираются подгруппы экспертов, которые в парах хорошо взаимно согласованы (например, показатель парной согласованности больше 0,7). Если получается несколько хорошо взаимно согласованных подгрупп, то отбирается подгруппа с максимальным показателем согласованности, в которую входит наибольшее

количество экспертов. Если не будет найдена хорошо согласованная подгруппа экспертов, то дальнейший анализ не имеет смысла.

В случае успешной оценки согласованности всей экспертной группы или нахождения хорошо согласованной подгруппы строится обобщенное нечеткое число второго типа.

Шаг 3. Вычисляются усредненные по выбранной в результате оценки согласованности экспертной группы значения параметров нечетких треугольных чисел, моделирующих длительность выполнения задач:

$$a_L = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Li}, \quad (6)$$

$$a_0 = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{0i}, \quad (7)$$

$$a_R = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Ri}, \quad (8)$$

где k_1 – количество экспертов в согласованной экспертной группе, ω_i – вес компетентности эксперта i .

Вычисляются среднеквадратические отклонения для левого и правого параметра треугольных нечетких чисел:

$$s_L = \sqrt{\frac{1}{k_1-1} \sum_{i=1}^{k_1} (a_{Li} - a_L)^2}, \quad (9)$$

$$s_R = \sqrt{\frac{1}{k_1-1} \sum_{i=1}^{k_1} (a_{Ri} - a_R)^2}. \quad (10)$$

Строятся доверительные интервалы для левых и правых параметров треугольного нечеткого числа:

$$\left[\sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Li} - \frac{s_L \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}}, \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Li} + \frac{s_L \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}} \right], \quad (11)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Ri} - \frac{s_R \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}}, \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Ri} + \frac{s_R \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}} \right], \quad (12)$$

где величина $\Delta_{k_1-1, \alpha}$ находится в соответствии с уровнем значимости α по таблице распределения Стьюдента.

По результатам проведенных вычислений формируется нечеткое интервально-значное число второго типа [20], верхняя $\mu_{\bar{A}}(x)$ и нижняя $\mu_{\underline{A}}(x)$ меры принадлежности которого задаются тройками параметров (нечеткими треугольными числами первого порядка):

$$\bar{A} = \left(a_{LL} = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Li} - \frac{s_L \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}}, a_0 = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{0i}, a_{RR} = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Ri} + \frac{s_R \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}} \right), \quad (13)$$

$$\underline{A} = \left(a_{LR} = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Li} + \frac{s_L \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}}, a_0 = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{0i}, a_{RR} = \sum_{i=1}^{k_1} \omega_i a_{Ri} - \frac{s_R \Delta_{k_1-1, \alpha}}{\sqrt{k_1}} \right). \quad (14)$$

На Рисунке 1 приведен общий вид получаемого в результате применения алгоритма нечеткого интервально-значного числа второго типа.

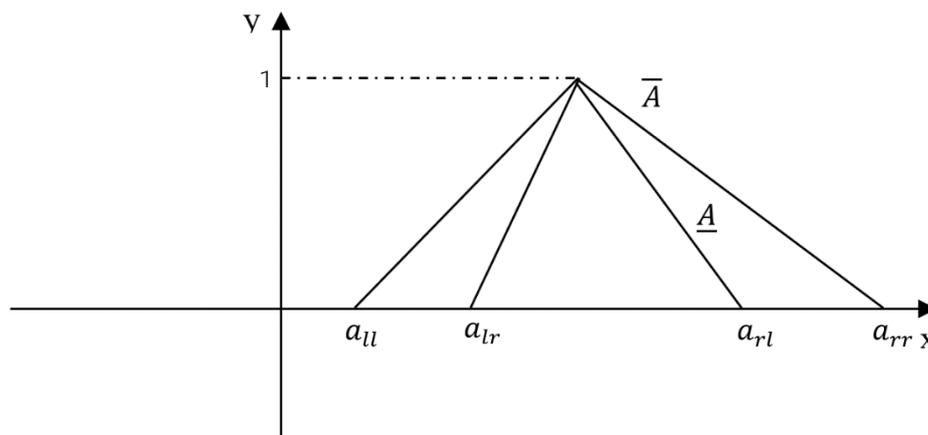


Рисунок 1 – Нечеткое интервально-значное число второго типа
Figure 1 – A fuzzy interval-digit number of the second type

Шаг 4. Построенные нечеткие интервально-значные оценки длительности выполнения работ позволяют учесть разброс мнений экспертов.

От нечеткой интервальной оценки можно на основе учета мнения лица, принимающего решение, перейти к треугольному нечеткому числу A , мера принадлежности которого $\mu_A(x)$ будет иметь вид:

$$\mu_A(x) = \theta \mu_{\underline{A}}(x) + (1 - \theta) \mu_{\overline{A}}(x), \quad (15)$$

где $\mu_{\overline{A}}(x)$ – мера принадлежности \overline{A} , $\mu_{\underline{A}}(x)$ – мера принадлежности \underline{A} , θ – коэффициент риска. Коэффициент риска выбирается в зависимости от отношения к риску лица, принимающего решение в соответствии со следующей Таблицей 1:

Таблица 1 – Значения коэффициента риска
Table 1 – Risk factor values

Отношение к риску	Коэффициент риска θ
Абсолютное неприятие риска	0
Очень сильное неприятие риска	0,1
Сильное неприятие риска	0,2
Среднее неприятие риска	0,3
Слабое неприятие риска	0,4
Нейтральное отношение к риску	0,5
Слабое предпочтение риска	0,6
Среднее предпочтение риска	0,7
Сильное предпочтение риска	0,8
Очень сильное предпочтение риска	0,9
Абсолютное предпочтение риска	1

Алгоритм сетевого планирования проекта с временными параметрами работ, представленными треугольными нечеткими числами

Сетевой граф выполнения проекта представляет собой граф, отражающий последовательность выполнения работ проекта. Дуги сетевого графа соответствуют работам, а вершины интерпретируются как события, связанные с завершением некоторых работ.

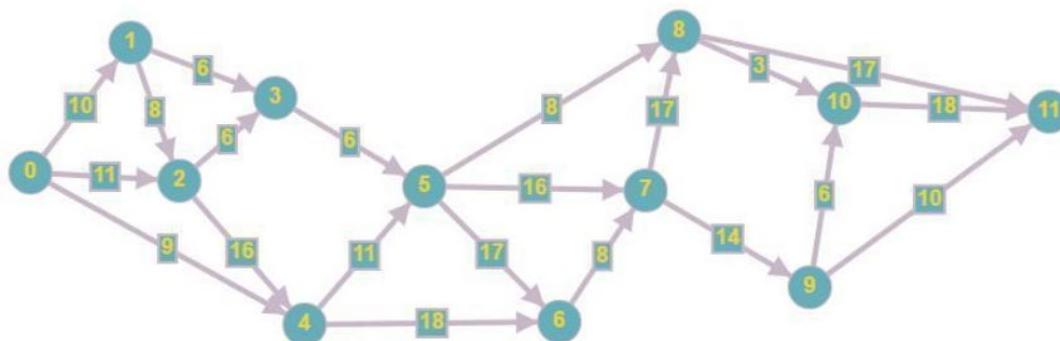


Рисунок 2 – Сетевой граф проекта
Figure 2 – The network graph of the project

Основные временные параметры работ и событий для сетевого графа приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Основные временные параметры работ и событий в сетевом графе
Table 2 – The main time parameters of work and events in the network graph

Элемент сети	Наименование параметра	Параметр
Событие i	Ранний срок свершения события	$t_p(i)$
	Поздний срок свершения события	$t_n(i)$
	Резерв времени события	j
Работа (i, j)	Продолжительность работы	j
	Ранний срок начала работы	$t_{рн}(i)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{ро}(i, j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i, j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i, j)$
	Полный резерв времени работы	$R_H(i, j)$
	Свободный резерв времени	$R_C(i, j)$
Путь L	Продолжительность пути	j
	Продолжительность критического пути	$T_{кр}$
	Резерв времени пути	j

Для случая, когда длительность работ проекта считается детерминированной, вычисление всех характеристик, приведенных в Таблице 2, можно осуществить по алгоритму нахождения критического пути. Сформулируем кратко данный алгоритм:

1. Вычисляется ранний срок свершения для каждого события:

$$t_p(j) = \max(t_p(i) + t_{ij}).$$

2. Вычисляется поздний срок свершения для каждого события:

$$t_n(i) = \min(t_n(j) - t_{ij}).$$

3. Вычисляется резерв времени для каждого события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

4. Вычисляются ранние и поздние моменты начала и завершения всех работ:

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i),$$

$$t_{ро}(i, j) = t_p(i) + t(i, j),$$

$$t_{\text{ПО}}(i, j) = t_{\text{П}}(j),$$

$$t_{\text{ПН}}(i, j) = t_{\text{П}}(j) - t(i, j).$$

5. Для каждой из работ производится расчет свободного и полного резервов времени:

$$R_{\text{П}}(i, j) = t_{\text{П}}(j) - t_{\text{П}}(i) - t(i, j); R_{\text{С}}(i) = t_{\text{П}}(j) + t_{\text{П}}(i) - t(i, j).$$

6. Восстанавливается критический путь.

Остановимся на специфике данного алгоритма для случая, когда длительности работ проекта представлены нечеткими треугольными числами.

Для нечетких треугольных чисел используются специальные арифметические операции. Рассмотрим данные операции для нечетких чисел L - R типа.

Пусть нечеткое число A является нормальным и унимодальным числом L - R типа. Мера принадлежности такого числа имеет вид:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq a \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x \geq a \end{cases}$$

где функции L и R обладают следующими свойствами:

1. $L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) = L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)$,
2. $R\left(\frac{a-x}{\beta}\right) = R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$,
3. $L(0) = R(0) = 1$,
4. $L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)$ является неубывающей функцией слева от точки a ,
5. $R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$ является невозрастающей функцией справа от точки a .

Для нечетких L - R чисел $A = (a, \alpha, \beta)$, $B = (a, \gamma, \delta)$ арифметические операции выполняются по правилам:

1. $A + B = (a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta)$,
2. $A - B = (a - b, \alpha + \delta, \beta + \gamma)$,
3. $A \cdot B = (a \cdot b, a \cdot \gamma + b \cdot \alpha, a \cdot \delta + b \cdot \beta)$, $a > 0, b > 0$,
4. $A \cdot B = (a \cdot b, -a \cdot \delta + b \cdot \alpha, -a \cdot \gamma + b \cdot \beta)$, $a < 0$,
5. $A \cdot B = (a \cdot b, -a \cdot \delta - b \cdot \beta, -a \cdot \gamma - b \cdot \alpha)$, $a < 0, b < 0$.

Поскольку в рамках исследования нечеткие треугольные числа представляют собой длительность выполнения работ, при вычислении разности будем рассматривать следующую операцию:

$$A - B = (\max(a - b, 0), \min(\alpha + \delta), \max(a - b, 0), \beta + \gamma).$$

Рассмотрим теперь изменения шагов алгоритма критического пути, соответствующие специфике работы с нечеткими треугольными числами L - R типа.

1*. Вычисляется ранний срок свершения i -го события.

В качестве раннего срока свершения i -го события нужно взять такое нечеткое число $t_{\text{П}}(i) + t_{ij}$, соответствующее вершине i , для которой на графе существует дуга, ведущая в вершину j , чтобы сумма вероятностей того, что $t_{\text{П}}(i) + t_{ij}$ больше или равно $t_{\text{П}}(k) + t_{kj}$ для всех других k , для которых на графе существует дуга, ведущая в вершину j , была максимальна. Для вычисления вероятности того, что нечеткое треугольное число $A = (a, \alpha, \beta)$ больше нечеткого треугольного числа $B = (a, \gamma, \delta)$ или равно ему, используется подход, описанный в [19]:

$$P(A \geq B) = \max\{\min[1 - \frac{\max(a-\alpha-b+\gamma,0)+\max(a-b,0)+\max(a+\beta-b-\delta,0)+(b+\delta-a-\alpha)}{|a-\alpha-b+\gamma|+|a-b|+|a+\beta-b-\delta|+(b+\delta-b+\gamma)}, 1], 0\}.$$

Обозначим раннее начало каждого события $T_p(i) = (t_{pi}, \varepsilon_i, \lambda_i)$.

Раннее начало заключительного события интерпретируется как время завершения всего проекта. В качестве точечной оценки времени завершения всего проекта можно взять результаты дефаззификации нечеткого числа по одному из следующих подходов:

- в качестве точечной оценки выбирается значение на числовой оси времени, в котором достигается максимума функции принадлежности;
- в качестве точечной оценки выбирается значение на числовой оси времени, которое делит площадь под кривой функции принадлежности пополам.

2*. Вычисляется поздний срок свершения i события.

В качестве позднего срока свершения i -го события нужно взять такое нечеткое число $t_{\Pi}(j) - t_{ij}$, соответствующее вершине j , в которую на графе существует дуга, ведущая из вершины i , чтобы сумма вероятностей того, что $t_{\Pi}(k) - t_{kj}$ больше или равно $t_p(j) - t_{ij}$ для всех других k , в которые на графе существует дуга, ведущая из вершины i , была максимальна.

Обозначим позднее начало каждого события $T_{\Pi}(i) = (t_{\Pi i}, \sigma_i, \nu_i)$.

3*. Вычисляется вероятность того, что некоторый момент времени t расположен между ранним и поздним сроком свершения i -го события.

Для вычисления вероятности нужно предварительно вычислить возможность $V(t)$ и необходимость $N(t)$ того, что момент времени t расположен между ранним и поздним сроком свершения i -го события. Процесс вычисления возможности и необходимости продемонстрирован на Рисунках 3, 4.

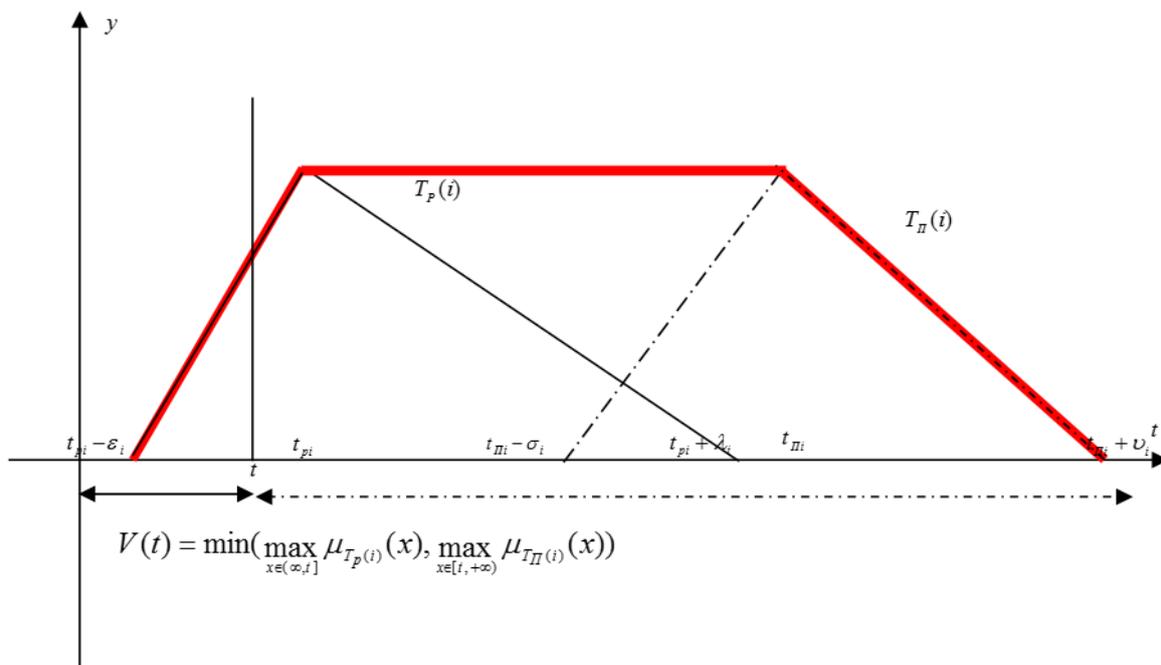


Рисунок 3 – Процесс вычисления возможности
Figure 3 – The process of calculating the opportunity

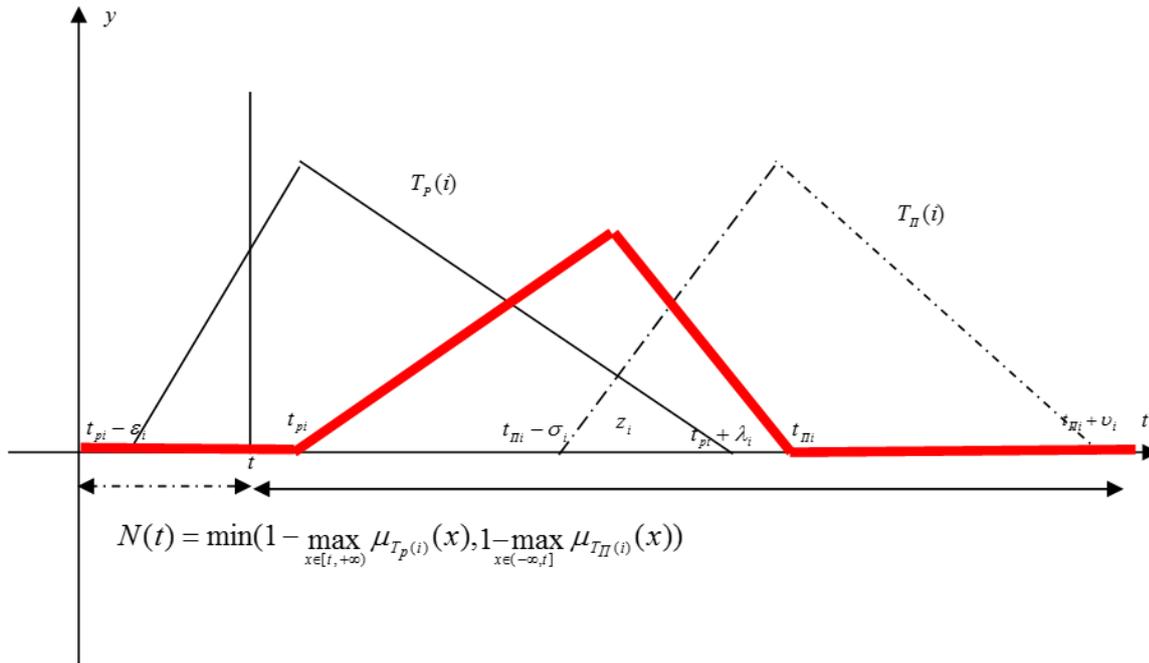


Рисунок 4 – Процесс вычисления необходимости
Figure 4 – The process of calculating the need

Выпишем аналитическое представление для возможности и необходимости:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{pi} - \varepsilon_i \\ \mu_{T_{pi}}(t), & t_{pi} - \varepsilon_i \leq t \leq t_{pi} \\ 1, & t_{pi} \leq t \leq t_{\pi i} \\ \mu_{T_{\pi i}}(t), & t_{\pi i} \leq t \leq t_{\pi i} + \nu_i \\ 0, & t \geq t_{\pi i} + \nu_i \end{cases},$$

$$N(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{pi} \\ 1 - \mu_{T_{pi}}(t), & t_{pi} \leq t \leq z_i \\ 1 - \mu_{T_{\pi i}}(t), & z_i \leq t \leq t_{\pi i} \\ 0, & t \geq t_{\pi i} \end{cases}.$$

На основании аналитического представления возможности и необходимости того, что некоторый момент времени t расположен между ранним и поздним сроком свершения i -го события, введем вероятность того, что некоторый момент времени t расположен между ранним и поздним сроком свершения i -го события:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{pi} - \varepsilon_i \\ \eta \mu_{T_{pi}}(t), & t_{pi} - \varepsilon_i \leq t \leq t_{pi} \\ \eta + (1 - \eta)(1 - \mu_{T_{pi}}(t)), & t_{pi} \leq t \leq z_i \\ \eta + (1 - \eta)(1 - \mu_{T_{\pi i}}(t)), & z_i \leq t \leq t_{\pi i} \\ \eta \mu_{T_{\pi i}}(t), & t_{\pi i} \leq t \leq t_{\pi i} + \nu_i \\ 0, & t \geq t_{\pi i} + \nu_i \end{cases},$$

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{pi} - \varepsilon_i \\ \eta \left(1 - \frac{t_{pi}-t}{\varepsilon_i}\right), & t_{pi} - \varepsilon_i \leq t \leq t_{pi} \\ \eta + (1 - \eta) \left(1 - \left(1 - \frac{t-t_{pi}}{\lambda_i}\right)\right), & t_{pi} \leq t \leq z_i \\ \eta + (1 - \eta) \left(\frac{t_{\Pi i}-t}{\sigma_i}\right), & z_i \leq t \leq t_{\Pi i} \\ \eta \left(1 - \frac{t-t_{\Pi i}}{v_i}\right), & t_{\Pi i} \leq t \leq t_{\Pi i} + v_i \\ 0, & t \geq t_{\Pi i} + v_i \end{cases},$$

где $\eta \in [0,1]$ – параметр, который используется в выпуклой линейной комбинации между значением возможности и необходимости при вычислении вероятности (степень предпочтения возможности), $z_i = \frac{t_{\Pi i}\lambda_i + t_{pi}\sigma_i}{\sigma_i + \lambda_i}$ – точка пересечения функции принадлежности раннего и позднего свершения событий (предполагается, что $t_{pi} \leq t_{\Pi i} - \sigma_i$).

4*. В качестве раннего начала работы (i, j) принимается ранний срок свершения i -го события $t_{рн}(i, j) = T_p(i) = (t_{pi}, \varepsilon_i, \lambda_i)$. Раннее время окончания работы (i, j) вычисляется на основе сложения нечетких чисел как:

$$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t_{ij} = (t_{poi}, \varphi_{ij}, \gamma_{ij}).$$

В качестве позднего окончания работы (i, j) принимается поздний срок свершения i -го события $t_{пo}(i, j) = T_{\Pi}(i) = (t_{\Pi i}, \sigma_i, v_i)$. Позднее время начала работы (i, j) вычисляется на основе описанной выше разницы нечетких чисел как:

$$t_{пн}(i, j) = t_{\Pi}(j) - t_{ij} = (t_{пnij}, \theta_{ij}, \rho_{ij}).$$

5*. Для нечетких чисел раннего начала и раннего окончания работы (i, j) по аналогии с процедурой, описанной на шаге 3*, вычисляется вероятность $P_{pp}(i, j)(t)$ того, что некоторый момент времени t расположен между ранним началом и ранним окончанием работы (i, j) :

$$P_{pp}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{pi} - \varepsilon_i \\ \eta \left(1 - \frac{t_{pi}-t}{\varepsilon_i}\right), & t_{pi} - \varepsilon_i \leq t \leq t_{pi} \\ \eta + (1 - \eta) \left(\frac{t-t_{pi}}{\lambda_i}\right), & t_{pi} \leq t \leq y_{ij} \\ \eta + (1 - \eta) \left(\frac{t_{poi}-t}{\varphi_{ij}}\right), & y_{ij} \leq t \leq t_{poi} \\ \eta \left(1 - \frac{t-t_{poi}}{\gamma_{ij}}\right), & t_{poi} \leq t \leq t_{poi} + \gamma_{ij} \\ 0, & t \geq t_{poi} + \gamma_{ij} \end{cases},$$

где $y_{ij} = \frac{t_{poi}\lambda_i + t_{pi}\varphi_{ij}}{\varphi_{ij} + \lambda_i}$.

Для нечетких чисел позднего начала и позднего окончания работы (i, j) по аналогии с процедурой, описанной на шаге 3*, вычисляется вероятность $P_{пп}(i, j)(t)$ того, что некоторый момент времени t расположен между поздним началом и поздним окончанием работы (i, j) .

6*. На основании полученных вероятностей выполнения работ в момент t и объемов ресурсов, необходимых для выполнения работ, можно вычислить объемы требуемых ресурсов для каждого момента времени.

Предположим, что все работы начинаются по раннему сроку начала. Для вероятностей $P_{pp}(i, j)$ каждой работы можно построить α -срез $A^\alpha(i, j)$, соответствующий выбранному уровню $\alpha \in \left[0, \min_{(i, j)} \left(\eta + (1 - \eta) \left(\frac{y_{ij} - t_{pi}}{\lambda_i} \right) \right) \right]$:

$$A^\alpha(i, j) = \left[\lambda_i \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) + t_{pi}, t_{poi} - \varphi_{ij} \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) \right].$$

Предполагается, что в моменты времени, которые входят во множество $A^\alpha(i, j)$, ресурсы, необходимые для выполнения работы, будут задействованы в полном объеме. На основании полученных α -срезов $A^\alpha(i, j)$ можно вычислить потребности каждого вида ресурсов на каждый момент времени t (предполагается, что время дискретно):

$$R_k(t) = \sum R_k(i, j), (i, j) \in M_k, \text{ для которых } t \in \left[\lambda_i \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) + t_{pi}, t_{poi} - \varphi_{ij} \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) \right],$$

где M_k – множество работ, в которых задействован k ресурс, $R_k(i, j)$ – количество ресурса k , необходимого для выполнения работы (i, j) . Если количество некоторого ресурса в некоторый момент времени превосходит верхнюю границу данного ресурса \overline{R}_k , то можно рассмотреть оптимизационную задачу для нахождения сдвига раннего срока начала каждой работы в допустимых пределах, чтобы для каждого момента времени минимизировать отклонение $R_k(t)$ от \overline{R}_k .

$$\sum_{t=0}^{t_{Пзав} + v_{зав}} \sum_{k=1}^N \sum (\min(0, \overline{R}_k - R_k(t)))^2 \rightarrow \min,$$

$$R_k(t) = \sum R_k(i, j), (i, j) \in M_k, \text{ для которых}$$

$$t \in \left[\lambda_i \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) + t_{pi} + x_{ij}, t_{poi} + x_{ij} - \varphi_{ij} \left(\frac{\alpha - \eta}{1 - \eta} \right) \right],$$

$$t_{pi} - \varepsilon_i + x_{ij} \leq t_{пниj} - \theta_{ij}, \forall (i, j),$$

$$t_{pi} + x_{ij} \leq t_{пниj}, \forall (i, j),$$

$$t_{pi} + \lambda_i + x_{ij} \leq t_{пниj} + \rho_{ij}, \forall (i, j).$$

Время t в данной оптимизационной задаче дискретно, для ее решения можно использовать генетический алгоритм.

Обсуждение

Статья содержит описание комплекса алгоритмов обработки нечеткой экспертной информации, вычисления временных параметров сетевого графа проекта и оптимизации его ресурсного обеспечения.

Первый алгоритм описывает построение нечетких интервально-значных оценок длительности работ проекта на основе обобщения мнений экспертов, представленных нечеткими треугольными числами, и переход от нечетких интервально-значных чисел к обычным нечетким треугольным числам. Использование на первом этапе нечетких интервально-значных чисел связано с тем, что на их основе можно учесть не только неопределенность мнений экспертов относительно длительности работ, но и расхождения во мнении экспертов при формировании функции принадлежности нечетких треугольных чисел. На втором этапе алгоритма на основе отношения к риску

руководителя экспертной группы или руководителя проекта осуществляется обратный переход от нечетких интервально-значных чисел к треугольным нечетким числам.

Второй алгоритм позволяет вычислить все временные параметры проекта, представленные нечеткими треугольными числами. Особенность данного алгоритма заключается в том, что вместо операций максимума и минимума для нечетких треугольных чисел используется вероятностное ранжирование нечетких треугольных чисел. При вычислении поздних сроков свершения событий используется модифицированная операция разности для нечетких треугольных чисел, не позволяющая получать нечеткие треугольные числа, носитель которых выходит за неотрицательную полуось.

В третьем алгоритме осуществляется вычисление вероятности того, что в некоторый конкретный момент осуществляется некоторая конкретная работа проекта.

В четвертом алгоритме на основе альфа-срезов, полученных в предыдущем алгоритме вероятностей, осуществляется оценка ресурсного обеспечения проекта. Для оптимизации ресурсного обеспечения предложена оптимизационная модель, для решения которой можно применять генетические алгоритмы.

Заключение

Предложенный комплекс алгоритмов может служить эффективным средством поддержки принятия решений при планировании проектов, состоящих из комплекса взаимосвязанных работ, в условиях риска и неопределенности.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Herroelen W., Leus R. Project Scheduling under Uncertainty: Survey and Research Potentials. *European Journal of Operational Research*. 2005;165(2):289–306. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.04.002>
2. Alagöz O., Azizoğlu M. Rescheduling of Identical Parallel Machines under Machine Eligibility Constraints. *European Journal of Operational Research*. 2003;149(3):523–532. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(02\)00499-X](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00499-X)
3. Fernandez A.A., Armacost R.L., Pet-Edwards J.J.A. The Role of the Nonanticipativity Constraint in Commercial Software for Stochastic Project Scheduling. *Computers & Industrial Engineering*. 1996;31(1-2):233–236. [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(96\)00119-2](https://doi.org/10.1016/0360-8352(96)00119-2)
4. Fernandez A.A., Armacost R.L., Pet-Edwards J.J. Understanding Simulation Solutions to Resource Constrained Project Scheduling Problems with Stochastic Task Durations. *Engineering Management Journal*. 1998;10(4):5–13. <https://doi.org/10.1080/10429247.1998.11415002>
5. Möhring R.H., Stork F. Linear Preselective Policies for Stochastic Project Scheduling. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2000;52(3):501–515. <https://doi.org/10.1007/s001860000095>
6. Möhring R.H., Stork F. Stochastic Project Scheduling Under Limited Resources: A Branch And Bound Algorithm Based On A New Class Of Policies. ResearchGate. URL: https://www.researchgate.net/publication/228454313_Stochastic_Project_Scheduling_Under_Limited_Resources_A_Branch_And_Bound_Algorithm_Based_On_A_New_Class_Of_Policies [Accessed 11th February 2025].
7. Golenko-Ginzburg D., Gonik A. Stochastic Network Project Scheduling with Non-Consumable Limited Resources. *International Journal of Production Economics*. 1997;48(1):29–37. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(96\)00019-9](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(96)00019-9)

8. Golenko-Ginzburg D., Gonik A. A Heuristic for Network Project Scheduling with Random Activity Durations Depending on the Resource Allocation. *International Journal on Production Economics*. 1998;55(2):149–162. [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(98\)00044-9](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(98)00044-9)
9. Gemmill D.D., Tsai Y.-W. Using a Simulated Annealing Algorithm to Schedule Activities of Resource-Constrained Projects. *Project Management Journal*. 1997;28(4):8–20.
10. Tsai Y.-W., Gemmill D.D. Using Tabu Search to Schedule Activities of Stochastic Resource-Constrained Projects. *European Journal of Operational Research*. 1998;111(1):129–141. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00311-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00311-1)
11. Valls V., Laguna M., Lino P., Pérez A., Quintanilla S. Project Scheduling with Stochastic Activity Interruptions. In: *Project Scheduling: Recent Models, Algorithms and Applications*. New York: Springer; 1999. pp. 333–353. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5533-9_15
12. Rommelfanger H. Fulpal – An Interactive Method for Solving (Multiobjective) Fuzzy Linear Programming Problems. In: *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*. Dordrecht: Springer; 1990. pp. 279–299. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2111-5_14
13. Dorn J., Kerr R., Thalhammer G. Reactive Scheduling: Improving the Robustness of Schedules and Restricting the Effects of Shop Floor Disturbances by Fuzzy Reasoning. *International Journal of Human–Computer Studies*. 1995;42(6):687–704.
14. Hapke M., Jaszkievicz A., Słowiński R. Fuzzy Multi-Mode Resource-Constrained Project Scheduling with Multiple Objectives. In: *Project Scheduling: Recent Models, Algorithms and Applications*. New York: Springer; 1999. pp. 353–380. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5533-9_16
15. Wang J.R. A Fuzzy Set Approach to Activity Scheduling for Product Development. *Journal of the Operational Research Society*. 1999;50:1217–1228. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600814>
16. Wang J. A Fuzzy Project Scheduling Approach to Minimize Schedule Risk for Product Development. *Fuzzy Sets and Systems*. 2002;127(2):99–116. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(01\)00146-4](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00146-4)
17. Wang J. A Fuzzy Robust Scheduling Approach for Product Development Projects. *European Journal of Operational Research*. 2004;152(1):180–194. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(02\)00701-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00701-4)
18. Doskočil R., Doubravský K. Critical Path Method based on Fuzzy Numbers: Comparison with Monte Carlo Method. In: *The 22nd IBIMA conference on Creating Global Competitive Economies, 13–14 November 2013, Rome, Italy*. Rome: International Business Information Management Association; 2013. pp. 1402–1411.
19. Chang P.-T., Lee E.S. Ranking of Fuzzy Sets Based on the Concept of Existence. *Computers & Mathematics with Applications*. 1994;27(9-10):1–21. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(94\)90118-X](https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)90118-X)
20. Азарнова Т.В., Рябцев Д.Г. Применение аппарата нечетких интервальнозначных чисел для оценки неопределенных параметров инвестиционных проектов и критериев их эффективности. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2021;(3):59–71. <https://doi.org/10.17308/sait.2021.3/3736>
Azarnova T.V., Ryabtsev D.G. The use of the mathematical tool of fuzzy interval-valued numbers for the estimation of undetermined parameters of investment projects and their efficiency criteria. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis*

and Information Technologies. 2021;(3):59–71. (In Russ.). <https://doi.org/10.17308/sait.2021.3/3736>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Азарнова Татьяна Васильевна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов операций, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: ivdas92@mail.ru

Tatyana V. Azarnova, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of Department of Mathematical Methods of Operations Research, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Аснина Наталия Георгиевна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой систем управления и информационных технологий в строительстве, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: andrey050569@yandex.ru

Natalia G. Asnina, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Head of the Department of Management Systems and Information Technologies in Construction, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation.

Бондаренко Юлия Валентиновна, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: bond.julia@mail.ru

Yulia V. Bondarenko, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Methods of Operations Research, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Сорокина Ирина Олеговна, магистрант, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: irina.sorokina232325@gmail.com

Irina O. Sorokina, Master's Student of Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 18.03.2025; одобрена после рецензирования 25.03.2025; принята к публикации 27.03.2025.

The article was submitted 18.03.2025; approved after reviewing 25.03.2025; accepted for publication 27.03.2025.