

УДК 004.021

DOI: [10.26102/2310-6018/2023.43.4.011](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2023.43.4.011)

## Программное обеспечение для решения интегрированной задачи оптимизации раскроя материала и маршрутизации инструмента для оборудования листовой резки с числовым программным управлением

А.Ф. Таваева<sup>1,2✉</sup>, А.А. Петунин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Уральский оптико-механический завод имени Э.С. Яламова, Екатеринбург,  
Российская Федерация

<sup>2</sup>УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург,  
Российская Федерация

<sup>3</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург,  
Российская Федерация

**Резюме.** В статье рассматривается вопрос разработки алгоритмов и программного обеспечения для решения интегрированной задачи раскроя и маршрутизации (*The Integrated Nesting and Routing Problem (INRP)*). Эта задача объединяет две известные задачи – задачу двумерного фигурного раскроя (принадлежит к классу задач раскроя-упаковки) и задачу оптимизации маршрута режущего инструмента для машин с числовым программным управлением (задача оптимизации траектории). В интегрированной задаче рассматривается единая целевая функция, рассчитываемая как сумма стоимости использованного для раскроя материала и стоимости процесса резки. В настоящей статье предлагается общая структура программного обеспечения и функциональная модель подсистемы автоматического раскроя и маршрутизации для решения интегрированной задачи применительно к оборудованию листовой резки с числовым программным управлением. В подсистеме автоматического раскроя и маршрутизации реализованы алгоритмы нахождения допустимого варианта раскроя для некоторых типов деталей и соответствующие этому варианту раскроя алгоритмы проектирования маршрута инструмента, ориентированные на минимизацию интегрированного показателя стоимости. Разработанные алгоритмы реализованы в виде открытого программного обеспечения на языке программирования Python. В статье приводятся результаты численных экспериментов, проведенных для лазерного комплекса листовой резки с ЧПУ. Разработанное программное обеспечение опробовано также для широкого класса практических задач при подготовке управляющих программ для различного оборудования листовой резки.

**Ключевые слова:** оборудование листовой резки с ЧПУ, интегрированная задача раскроя и маршрутизации, листовой раскрой, маршрут инструмента, стоимость процесса резки, оптимизация.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-21-00343).

**Для цитирования:** Таваева А.Ф., Петунин А.А. Программное обеспечение для решения интегрированной задачи оптимизации раскроя материала и маршрутизации инструмента для оборудования листовой резки с числовым программным управлением. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1454> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.011

## Software for solving the integrated nesting and routing problem applied to CNC sheet cutting machines

A.F. Tavaeva<sup>1,2✉</sup>, A.A. Petunin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Urals Optical-Mechanical Plant, Ekaterinburg, the Russian Federation

<sup>2</sup>Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation

<sup>3</sup>Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, the Russian Federation

**Abstract.** The paper discusses the issue of developing algorithms and software for solving the integrated nesting and routing problem (INRP). This problem combines two known matters: 2D nesting problem (belongs to the class of Cutting & Packing) and the problem of cutting process optimization (Cutting Path Problem). The integrated additive objective function in INRP is a sum of used material cost for nesting and cutting process cost. The paper proposes a general software structure and a functional model of the automatic nesting and routing subsystem for solving an integrated problem in relation to the CNC sheet cutting equipment. The subsystem of automatic cutting and routing implements algorithms for finding an admissible nesting pattern for some types of parts and corresponding to this nesting pattern algorithms for the tool path generation focused on minimizing the integrated cost criterion. The algorithms are implemented as open source software using Python. The paper presents the results of numerical experiments for the CNC laser complex of sheet cutting. The developed software has also been tested for several types of practical tasks in control programs generation for various sheet cutting equipment.

**Keywords:** CNC sheet cutting machine, integrated nesting and routing problem, sheet cutting, tool path, cutting process cost, optimization.

**Acknowledgements:** the research was funded by the Russian Science Foundation (grant No. № 23-21-00343).

**For citation:** Tavaeva A.F., Petunin A.A. Software for solving the integrated nesting and routing problem applied to CNC sheet cutting machines. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1454> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.011 (In Russ.).

### Введение

В настоящее время во многих отраслях промышленности в заготовительном производстве при обработке листовых материалов широкое применение находит оборудование с числовым программным управлением (ЧПУ). К такому типу оборудования относятся машины лазерной, плазменной, гидроабразивной и газовой резки. В процессе разработки управляющих программ (УП) для этого класса оборудования возникают две известные оптимизационные задачи: задача 2D фигурного раскроя (относится к классу задач раскроя-упаковки) [1,2] и задача оптимизации траектории перемещения режущего инструмента (относится к классу задач маршрутизации) [3]. В работе рассматривается интегрированная задача раскроя и маршрутизации, названная Integrated Nesting and Routing Problem (INRP). Эта задача является комбинацией двух вышеописанных задач – задачи 2D фигурного раскроя и задачи оптимизации маршрутизации инструмента. Для задачи INRP единая стоимостная целевая функция записывается в следующем виде [4]:

$$C_{INRP} = [C_m \cdot m] + [C_{on} \cdot L_{on} + C_{off} \cdot L_{off} + C_{pt} \cdot N_{pt}] \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $m$  – масса раскраиваемого материала,  $C_m$  – стоимость единицы массы раскраиваемого материала,  $C_{on}$  и  $C_{off}$  – стоимость единицы пути инструмента на рабочем и холостом ходе соответственно,  $L_{on}$  и  $L_{off}$  – длина пути режущего инструмента на рабочем и холостом ходе соответственно,  $C_{pt}$  – стоимость одной точки врезки,  $N_{pt}$  – количество точек врезок.

В (1) первое слагаемое в квадратных скобках соответствует стоимости материала, использованного для раскроя, второе – стоимости процесса резки. Отметим, что большая часть современных исследований направлена на минимизацию только холостых перемещений режущего инструмента [5, 6], однако наибольшая составляющая стоимости процесса резки – это затраты на рабочие перемещения режущего инструмента и затраты на врезание в материал в так называемых точках врезки. Поэтому разработка эффективных алгоритмов, направленных на минимизацию количества точек врезок и длины рабочих резов, имеет очевидную актуальность. Одним из подходов для минимизации этих параметров – применение мульти-контурной резки [4].

Проектирование УП для рассматриваемого класса оборудования выполняется в САМ-системах, которые в настоящее время не гарантируют получения ни оптимальных раскройных карт, с точки зрения минимальной стоимости использованного для раскроя материала, ни оптимальной траектории инструмента, с точки зрения минимальной стоимости процесса резки. При этом, как было показано в [7], даже оптимальный маршрут режущего инструмента, полученный для оптимальной раскройной карты, не гарантирует экстремума интегрированного показателя  $C_{INRP}$  (1). В современных САМ-системах, как правило, существуют отдельные модули для проектирования раскроя и маршрута инструмента, которые автоматизируют решение некоторых оптимизационных задач маршрутизации (например, задачу минимизации холостого хода режущего инструмента), но при условии использования стандартной техники резки контуров деталей (по полному контуру: один контур – одна точка врезки). В свою очередь применение упомянутой выше мульти-контурной резки, когда несколько контуров вырезаются с использованием одной точки врезки, позволяет во многих случаях сократить стоимость процесса резки. Однако для реализации мульти-контурной резки пользователям САМ-систем приходится прибегать к трудоемкому интерактивному режиму, обычно выполняя процедуры объединения конгруэнтных деталей в группы таким образом, чтобы обеспечить их вырезку с минимальным количеством точек врезки и уменьшая суммарную длину перемещений инструмента на рабочем ходе за счет применения так называемой техники совмещенного реза. Однако в данном случае значительно возрастает время на разработку УП и отсутствует возможность минимизации интегрированного показателя стоимости раскроя и маршрутизации.

В последнее время начинают появляться исследования, направленные на решение интегрированной задачи фигурного раскроя и маршрутизации [8, 9]. В [10] приводится литературный обзор по теме раскроя и маршрутизации, предлагается классификационная структура и выделяются многочисленные пробелы в исследованиях и возможности для дальнейшего научного вклада. Однако большинство исследований рассматривает каждую из задач по отдельности. В работе [11] уделяется внимание вопросу оптимизации траектории перемещения режущего инструмента при операции гравирования, предлагаемый алгоритм может быть расширен для получения маршрута для 3D принтера. Lui X. и Chang D. [12] предлагают генетический алгоритм, основанный на обучении с подкреплением, для оптимизации маршрута инструмента при лазерной резке корпусных деталей. Cuellar D., Palacio A и др. в своей работе [13] предлагают подход к решению оптимизации маршрута инструмента, основанный на объединении GRASP алгоритма с точной моделью. Подробный обзор применяемых математических моделей, используемых для решения фигурного раскроя приведен в [14, 15]. В случае,

если все детали имеют прямоугольную форму, то для такого класса задач (2D Bin Packing Problem – BPP) современный математический аппарат позволяет разрабатывать специальные алгоритмы и программное обеспечение (ПО), позволяющие получать точное решение для практических задач за разумное время. В [16] дается обзор существующих методов и алгоритмов решения задач класса BPP. В то же время большинство работ, которые направлены на решение прямоугольного раскроя, прибегают к использованию эвристических алгоритмов [17-19]. Отметим, что в опубликованных алгоритмах не всегда учитываются технологические ограничения, обусловленные особенностями используемого оборудования с ЧПУ. Речь идет о термических деформациях и искажении геометрических размеров вырезаемых деталей. Тем не менее, в ряде работ (например, [20-22]), проектирование УП для машин термической резки с ЧПУ в той или иной степени осуществляется с учетом указанных особенностей резки.

Таким образом, в настоящее время вопрос разработки алгоритмов и соответствующего программного обеспечения, которые позволяли бы в автоматическом режиме проектировать раскройные карты и траекторию инструмента с минимальными значениями интегрированного стоимостного критерия раскроя и маршрутизации при соблюдении технологических ограничений процесса резки, остается малоисследованным. В данной работе предлагается общая структура программного обеспечения и функциональная модель подсистемы автоматического раскроя и маршрутизации для решения задачи INRP применительно к конгруэнтным типам деталей. В частности, были реализованы алгоритмы для трех классов геометрических типов раскраиваемых деталей: круглых, прямоугольных и треугольных. Генерируемые в подсистеме маршруты инструмента предусматривают учет требований термической резки на технологическом оборудовании с ЧПУ и обеспечивают близкие к минимальному значению интегрированного стоимостного критерия.

### Материалы и методы

Алгоритмы для решения интегрированной задачи оптимизации раскроя и маршрутизации без использования интерактивных процедур реализованы в виде открытого ПО на языке программирования Python. На Рисунке 1а приведена общая структура ПО для автоматического проектирования раскройных карт и траектории инструмента, ориентированного на получение минимальных значений функции стоимости раскроя и маршрутизации (1) при соблюдении технологических ограничений процесса резки, на Рисунке 1б – функциональная модель подсистемы для автоматического раскроя листового материала и проектирования маршрута режущего инструмента.

В качестве входных данных в ПО (Рисунок 1а) подается:

- файл \*.dxf с геометрической информацией раскраиваемой детали;
- исходные данные для формирования задания на раскрой, также на данном этапе подключается база данных (БД) марок листовых материалов и толщин, наиболее часто обрабатываемых на оборудовании с ЧПУ.

После этого формируется *задание на раскрой*, которое подается на вход в подсистему автоматического раскроя и проектирования маршрута режущего инструмента (Рисунок 1б) и включает в себя:

- информацию о геометрии раскраиваемой детали;
- размеры (А, В) листового материала;
- количество деталей  $n$ , которое необходимо раскроить на (А, В);

- значение расстояния *lead\_in* от точки врезки до контура детали и значение расстояния *lead\_out* от контура до точки выключения режущего инструмента;
- значение ширины реза *delta*;
- значение расстояния от края листа до раскраиваемых деталей *dist*.

Затем в зависимости от геометрического класса, к которому относится раскраиваемая деталь, автоматически выбирается алгоритм решения интегрированной задачи раскроя и маршрутизации. Алгоритм решения задачи основан на идее объединения деталей в блоки и реализации внутри каждого блока мульти-контурной резки (с совмещенными или несомещенными резами, в зависимости от того, к какому геометрическому классу относится раскраиваемая деталь). При расчете интегрированного показателя стоимости  $C_{INPR}$  используется БД значений стоимостных параметров, которая связана с БД марок листовых материалов и толщин. В результате на выходе алгоритм возвращает допустимый вариант раскройной карты и соответствующий ему маршрут режущего инструмента. При этом допустимость варианта раскроя определяется с учетом раскраиваемого материала и технологических требований резки деталей на конкретном технологическом оборудовании с ЧПУ. В свою очередь маршрут резки считается заданным, если заданы точки врезки и выключения инструмента, перемещения режущего инструмента на рабочем и холостом ходе. Алгоритмы решения интегрированной задачи раскроя и маршрутизации для геометрических классов треугольных, прямоугольных и круглых деталей подробно описаны в [7, 23, 24].

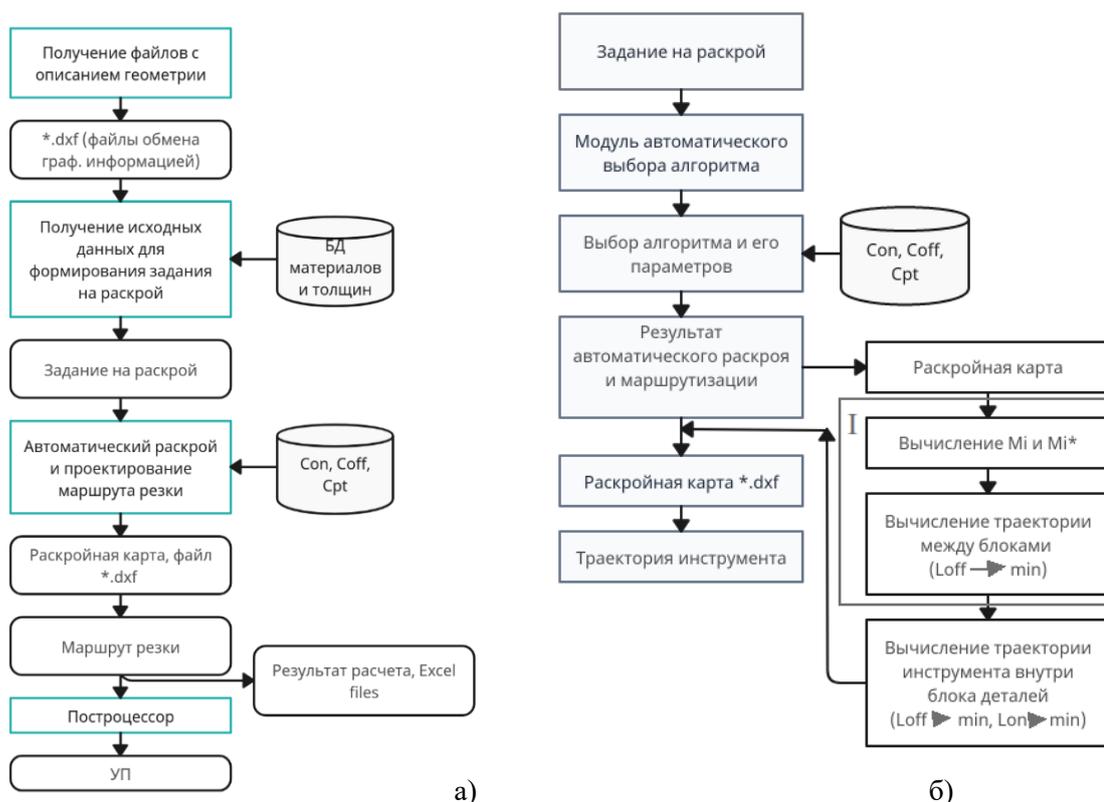


Рисунок 1 – Общая структура ПО (а) и функциональная модель подсистемы для автоматического раскроя и маршрутизации инструмента (б)

Figure 1 – General structure of software (a) and functional model of the subsystem for automatic cutting and routing of cutting tools (b)

Остановимся более подробно на этапе формирования маршрута режущего инструмента. На Рисунке 16 выделен рамкой блок  $I$ , который включает в себя выбор допустимых точек врезок и соответствующих им точек выключения режущего инструмента. После выбора соответствующих точек врезок/выключения минимизируются холостые перемещения режущего инструмента между блоками деталей с помощью алгоритма ветвей и границ [25].

Прежде чем перейти к рассмотрению алгоритмов, входящих в подсистему автоматического раскроя и маршрутизации, примем следующие обозначения. Пусть  $O$  – нулевая точка на раскройной карте,  $MATR$  – матрица минимальных попарных расстояний между блоками деталей,  $M_i$  – точка врезки, в свою очередь  $M_i^*$  – соответствующая  $M_i$  точка выключения инструмента, где  $i \in \overline{1, N}$ ,  $N$  – количество блоков деталей на раскройной карте,  $k$  – количество допустимых точек врезок для каждого блока деталей.

Следует отметить, что внутри каждого блока деталей необходимо реализовывать мульти-контурную резку контуров [4], и, как правило, в данном случае допустимое количество точек врезок конечно. Например, для блока треугольных деталей на Рисунке 2а  $k = 2$ , допустимые точки врезки с точки зрения технологии резки выделены красными рамками, стрелками показано направление резки для точки врезки выбранной снизу. Для блока прямоугольных деталей на Рисунке 2б количество допустимых точек врезок составит  $k = (p - 1) + (l - 1)$ .

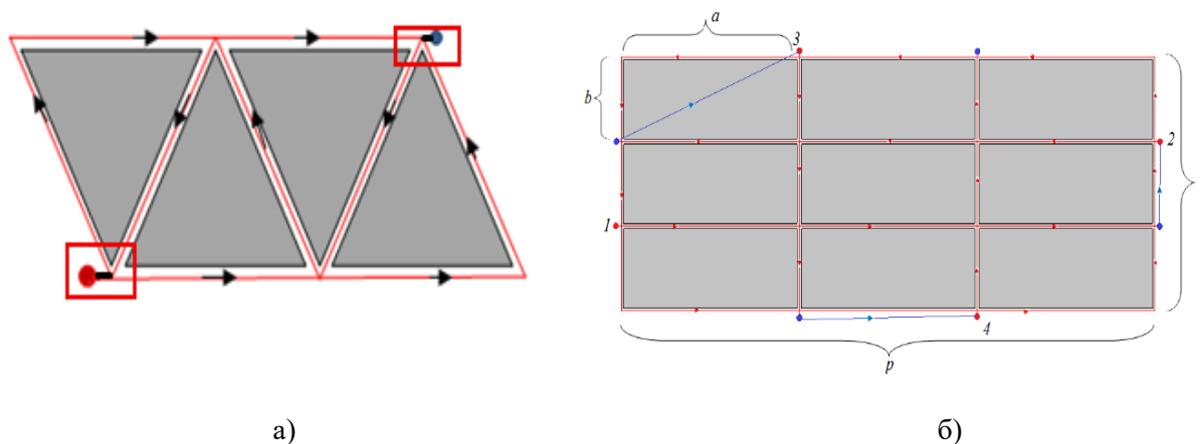


Рисунок 2 – Блок треугольных деталей (а) и блок прямоугольных деталей (б)  
Figure 2 – Block of triangle parts (a) and the block of rectangle parts (b)

Прежде чем заполнять  $MATR$  попарными расстояниями между блоками деталей, добавим значения расстояний между  $O$  и соответствующими блоками деталей, а также выберем допустимые  $M_i$  и  $M_i^*$ , где  $i \in \overline{1, N}$ , с использованием жадного алгоритма [26]. Псевдокод приведен ниже (алгоритм 1).

**Алгоритм 1.**

1.  $m = [ ]$
2. **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**
3.      $L_{off} = [ ]$
4.     **for**  $j = 1$  **to**  $k$  **do**
5.          $L_{off}.append(L_{off}^{0-i_j})$
6.      $min\_L_{off} = \min(L_{off})$
7.      $M_i = (x_j, y_j)$

8.  $M_i^* = (x_j^*, y_j^*)$
9. `m.append(minLoff)`
10. `MATR.append(m)`

На следующем этапе вычисляем минимальные попарные расстояния между блоками деталей и точкой  $O$ . Для значений  $i = j$ ,  $L_{off}^{i-j} = \infty$ . Псевдокод приведен ниже (алгоритм 2).

**Алгоритм 2.**

1. **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**
2.      $m = [ ]$
3.     **for**  $j = 0$  **to**  $N$  **do**
4.     **if**  $i \neq j$  **do**
5.          $m.append(L_{off}^{i-j})$
6.     `MATR.append(m)`

Сформировав матрицу попарных расстояний между блоками деталей и нулевой точкой  $O$ , находим минимальные холостые перемещения режущего инструмента с помощью алгоритма ветвей и границ.

Пример нахождения допустимых точек врезок, отвечающих технологическим требованиям процесса резки, и минимального холостого хода режущего инструмента на примере двух блоков прямоугольных деталей приведен на Рисунке 3. Листовой материал марки 12Х18Н10Т ( $\Delta = 4$  мм) размерами (700x1500) мм раскраивается прямоугольными деталями размером (180x236) мм, при этом  $n=22$ ,  $delta=0.2$  мм,  $dist=7$  мм,  $lead\_in=6$  мм,  $lead\_out=3$  мм. Расчет выполнялся для лазерного CO<sub>2</sub> комплекса с ЧПУ.

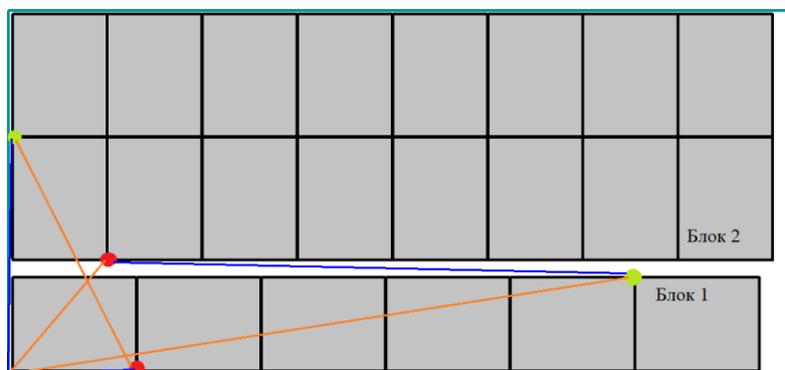


Рисунок 3 – Пример результата вычисления точек врезок/выключения инструмента и минимального холостого хода между блоками деталей

Figure 3 – Example of piercing and minimum idling path calculation

На Рисунке 3 красными кругами для каждого блока деталей показаны точки врезки в каждый блок деталей, зеленым – точки выключения из блока деталей, синими линиями – минимальный холостой ход, оранжевым – все возможные холостые перемещения инструмента между блоком 1 и 2 для выбранных точек врезок/выключения. Нулевая точка принята в нижнем углу листа. На следующем этапе вычисляем траекторию перемещения режущего инструмента внутри каждого блока деталей, см. алгоритмы для классов круглых [24], прямоугольных [7] и треугольных деталей [23], при этом  $L_{on} \rightarrow \min$ ,  $L_{off} \rightarrow \min$ ,  $N_{pt} \rightarrow \min$ . В основу алгоритмов нахождения траектории инструмента лежит идея применения мульти-контурной резки (например, для класса круглых деталей) или мульти-контурной резки с совмещенным резом (например, для классов прямоугольных и треугольных деталей). Для примера на

Рисунке 3 была рассчитана траектория перемещения режущего инструмента для каждого блока с применением мульти-контурной резки с совмещенным резом. Результат приведен на Рисунке 4. Красными линиями показана траектория перемещения режущего инструмента на рабочем ходе, синим – на холостом.

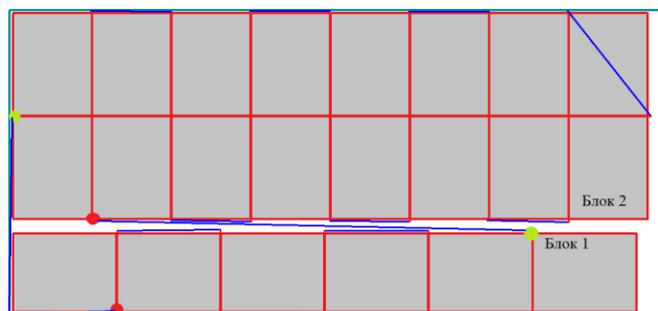


Рисунок 4 – Пример результата вычисления траектории перемещения инструмента на рабочем ходе с применением мульти-контурной резки с совмещенным резом  
Figure 4 – Example of cutting path calculation using multi-contour cutting with common cut

Опираясь на общую структуру ПО и функциональную модель подсистемы для автоматического раскрой и маршрутизации инструмента, приведенных на Рисунке 1, было разработано ПО «Раскрой и маршрутизация (РиМ)» для подготовки УП применительно к оборудованию листовой резки с ЧПУ. Интерфейс главного экрана приведен на Рисунке 5. Пользователю необходимо открыть \*.dxf файл, добавить исходные данные. Исходя из полученных данных автоматически формируется задание на раскрой. После чего можно получить раскрой листового материала и соответствующий для него маршрут режущего инструмента, сформировать УП. При формировании раскройной карты и маршрута режущего инструмента интегрированный показатель  $C_{INRP} \rightarrow \min$ , учитываются условие взаимного непересечения деталей, технологические особенности выбора точек врезки/выключения и проектирования маршрута резки, а также условия, обусловленные технологическими требованиями резки деталей на оборудовании с ЧПУ. В ПО «Раскрой и маршрутизация (РиМ)» внедрены алгоритмы для автоматического раскрой [7, 23, 24], разработанные ранее авторами данной статьи. Расчет  $C_{INRP}$  производился с помощью БД, рассчитанной по [27].

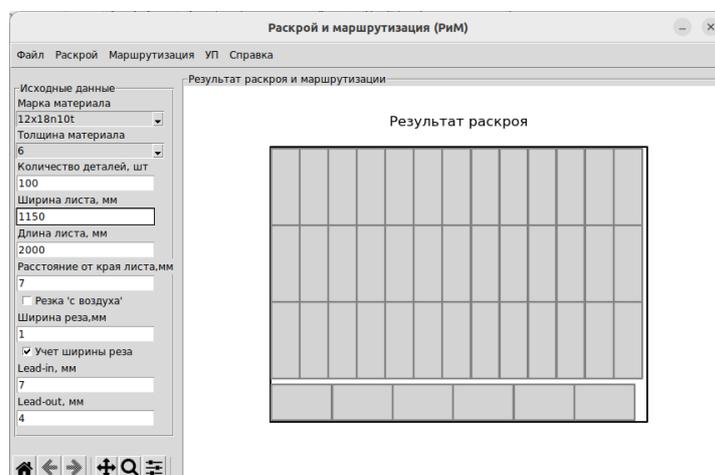


Рисунок 5 – Главное окно ПО «Раскрой и маршрутизация (РиМ)»  
Figure 5 – Main window of Nesting and Routing (N&R) Software

## Результаты

Все алгоритмы тестировались на реальных практических задачах для лазерного CO<sub>2</sub> комплекса с ЧПУ на примере деталей, относящихся к круглым и прямоугольным геометрическим классам. Результаты численных экспериментов иллюстрирует Таблица 1, которая организована следующим образом. Первая группа столбцов с общим названием *Задача* описывает исходные данные, где *ID* – название задания на раскрой, (*A*, *B*) – размеры листового материала в мм, *info* – информация о геометрии раскраиваемой детали ((*l*, *h*) мм – в случае прямоугольной детали, *R* мм – в случае круглых деталей). Вторая группа столбцов с общим названием *Результат расчета* содержит информацию о результатах раскроя и назначении маршрута режущего инструмента, полученных с помощью алгоритмов, разработанных в данной статье. Группа *Результат расчета* содержит следующую информацию: *n* – количество раскроенных деталей, *время* счета в секундах (включает суммарное время на расчет раскроя, расчет маршрутизации инструмента и время на генерацию УП), *C<sub>INRP</sub>* – значение интегрированного показателя (1). В Таблице 1 для каждого *ID* приведен результат расчета при минимальном значении *C<sub>INRP</sub>*.

Таблица 1 – Результаты численных экспериментов

Table 1 – Results of computing experiments

Задача			Результат расчета		
ID	(A, B), мм	info	n	Время, с	<i>C<sub>INRP</sub></i> , руб.
12X18_5_01	(1250, 2500)	(236,180) мм	67	2,07	40541,6
08PS_10_02	(1000,2000)	(120,56) мм	268	5,25	14354,9
AMG_3_03	(1500,3000)	(410,320) мм	32	3,07	16075,2
AMG_1_04	(1200,3000)	R 120 мм	48	3,28	4210,6
12X18_8_05	(1000,2000)	R 73,5 мм	78	3,07	54389,1
12X18_1_06	(1000,2000)	(132,254) мм	52	4,67	4970,6
ST10_3.9_07	(1250,2500)	R 30 мм	760	5,34	9564,4
08PS_1.2_11	(1500,3000)	(62,23) мм	2867	7,31	5142,6
AMG_5_09	(1200,3000)	(160,178) мм	112	2,9	28548,4
12X18_1_10	(1000,2000)	(36,54) мм	927	4,67	6073,0
AMG_1_08	(1200,3000)	(61,96) мм	564	3,42	5005,9
ST10_15_12	(1500,3000)	(130,98) мм	315	3,07	46424,1
AMG_2_13	(1200,3000)	R 69 мм	164	2,75	8867,8
12X18_5_14	(1000,2000)	(100,360) мм	49	2,79	26772,2
ST10_5_15	(1500,3000)	(41,130) мм	792	4,3	16675,5
12X18_3_16	(1000,2000)	R 13,5 мм	2223	22,0	23447,4

## Обсуждение

Из Таблицы 1 видно, что время на проектирование УП для оборудования листовой резки с ЧПУ с помощью разработанного ПО «Раскрой и маршрутизация» для данного набора тестов более чем приемлемо ( $\leq 22$  сек.), при этом УП генерируются

автоматически, а размерность задач соответствует размерности большей части практических задач. Доказательство минимальности значений интегрированного показателя стоимости раскроя и маршрутизации за счет применения мульти-контурной резки для сформированных на этапе раскроя блоков деталей не производилось, вместе с тем, можно отметить высокую вероятность получения экстремальных значений интегрированного стоимостного критерия. Как уже отмечалось, при этом при проектировании УП учитываются технологические особенности и ограничения процесса листовой резки на машинах с ЧПУ (в том числе особенности термической резки). Разработанное программное обеспечение также было опробовано для решения некоторых практических задач на одном типе машин гидроабразивной резки и плазменной резки.

### Заключение

В данной работе:

1. Предложена общая структура ПО для автоматического проектирования УП, ориентированного на минимизацию значения интегрированного показателя задачи INRP и соблюдение технологических особенностей процесса листовой резки на оборудовании с ЧПУ.

2. Предложена функциональная модель подсистемы для автоматического раскроя листового материала и проектирования маршрута режущего инструмента. Внедрен ранее разработанный авторами статьи алгоритм формирования блоков конгруэнтных деталей и реализации мульти-контурной резки сформированных блоков для трех геометрических классов раскраиваемых деталей (круглые, прямоугольные, треугольные).

3. Предложен алгоритм формирования допустимых точек врезки в листовый материал и выключения режущего инструмента. Для сформированных точек врезок/выключения предложен алгоритм, основанный на методе ветвей и границ, обеспечивающий минимизацию холостых перемещений режущего инструмента между блоками деталей.

4. Для сформированных блоков конгруэнтных деталей применен ранее разработанный авторами данной статьи алгоритм формирования маршрута режущего инструмента с помощью мульти-контурной резки.

5. Опираясь на общую структуру ПО и функциональную модель подсистемы для автоматического раскроя и маршрутизации инструмента, было разработано ПО «Раскрой и маршрутизация (РиМ)» для подготовки УП применительно к оборудованию листовой резки с ЧПУ для минимизации значения интегрированного показателя задачи INRP с учетом соблюдения технологических особенностей процесса листовой резки. Разработанные алгоритмы реализованы на языке Python.

6. Для оценки производительности и эффективности алгоритмов проведены численные эксперименты на тестовых примерах.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J.A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020;1072:214–221. DOI: 10.1007/978-3-030-33585-4\_21.
2. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007;183:1109–1130. DOI: 10.1016/j.ejor.2005.12.047.

3. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. A review of cutting path algorithms for laser cutters. *Int.J. Adv. Manuf. Technol.* 2016;87(5-8):1865–1884. DOI: 10.1007/s00170-016-8609-1.
4. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. *Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы.* Екатеринбург: УрФУ; 2020. 247 с.
5. Kuznetsov P.M., Yagopol'skii A.G. Optimizing the idling path of large metal-cutting machines. *Russian Engineering Research.* 2020;1081–1083. DOI: 10.3103/S1068798X20120382.
6. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A discrete – continuous routing problem with precedence constraints. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2018;300(1):56–71. DOI: 10.1134/S0081543818020074.
7. Tavaeva A.F., Petunin A.A. Algorithm for solving the integrated problem of the rectangular parts nesting and tool routing for CNC sheet cutting machines. *Lecture Notes in Electrical Engineering* (in press).
8. Oliveira L., Silva E., Oliveira J. et al. Integrating irregular strip packing and cutting path determination problems: A discrete exact approach. *Comput. Ind. Eng.* 2020;149:1–9. DOI: 10.1016/j.cie.2020.106757.
9. Qi D., Rao Y. An integrated approach on cut planning and nesting for metal structures manufacturing. *Journal of Engineering Manufacture.* 2014;228(4):527–539. DOI: 10.1177/0954405413500979.
10. Salem K.H., Oliveira J.F., Silva E. Cutting and packing problems under uncertainty: literature review and classification framework. *International Transactions in Operational Research.* 2023;30(13). DOI: 10.1111/itor.13318.
11. Eapen N., Heckendorn R.B. PENGRAV: a practical polynomial time algorithm for optimizing the engraving path of an automatic engraving machine using a 3/2 approximation algorithm. *Int. J. of Advanced Manufacturing Technology.* 2022;123(3). DOI: 10.1007/s00170-022-10148-9.
12. Lui X., Chang D. An improved method for optimizing CNC laser cutting paths for ship hull components with thicknesses up to 24 mm. *Journal of Marine Science and Engineering.* 2023;11(3). DOI: 10.3390/jmse11030652.
13. Cuellar D., Palacio A., Ospina E., Botero M. et al. Modeling and solving the endpoint cutting problem. *Int. Transactions in Operational Research.* 2021;30(12). DOI: 10.1111/itor.13091.
14. Leao A., Toledo F., Oliveria J., Carravilla M. Irregular packing problems: A review of mathematical models. *European journal of operational research.* 2019;282(3):803–822. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.04.045.
15. Guo B., Zhang Y., Hu J et al. Two-dimensional irregular packing problems: A review. *Front. Mech. Eng.* 2022;79:1–15. DOI: 10.3389/fmech.2022.966691.
16. Mezghani S., Haddar B., Chabchoub H. The evolution of rectangular bin packing problem – A review of research topics, applications, and cited papers. *Journal of Industrial and Management Optimization.* 2022;19(5). DOI: 10.3934/jimo.2022088.
17. Nascimento D., Cherri A., Oliveira J. The two-dimensional cutting stock problem with usable leftovers: mathematical modelling and heuristic approaches. *Oper Res Int J.* 2022;22:5363–5403. DOI: 10.1007/s12351-022-00735-9.
18. Amaro J., Santos M., de Carvalho G et al. Metaheuristics for the minimum time cut path problem with different cutting and sliding speeds. *Algorithms.* 2021;14(11):305. DOI: DOI: 10.3390/a14110305.

19. Junior B., Carvalho G., Santos M. Evolutionary algorithms for optimization sequence of cut in the laser cutting Path Problem. *Applied Sciences*. 2023;13(18). DOI: 10.3390/app131810133.
20. Hajad M., Saerang V., Jaturanonda C., Dumkum C. Laser cutting path optimization with minimum heat accumulation. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2019;105(3). DOI: 10.1007/s00170-019-04455-x.
21. Levichev N., García A., Dewil R et al. A virtual sensing approach for quality and productivity optimization in laser flame cutting. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2022;121(9-10). DOI: 10.1007/s00170-022-09750-8.
22. Tavaeva A., Petunin A., Polishchuk E. Methods of cutting cost minimizing in problem of tool route optimization for CNC laser machines. *International Conference on Industrial Engineering*. 2020:447–455. DOI: 10.1007/978-3-030-22063-1\_48.
23. Таваева А.Ф., Петунин А.А. Алгоритм решения интегрированной задачи раскроя и маршрутизации на примере типовых деталей для оборудования листовой резки с числовым программным управлением. *Вестник Башкирского университета*. 2022;27(3):535–540. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.3.8.
24. Таваева А.Ф., Петунин А.А. Новый алгоритм раскроя и маршрутизации для систем автоматизированного проектирования управляющих программ оборудования листовой резки с числовым программным управлением. *Вестник уральского государственного университета путей сообщения*. 2022;56(4):21–27. DOI: 10.20291/2079-0392-2022-4-21-27.
25. Ascheuer N., Junger M., Reinelt G. A Branch & cut algorithm for the asymmetric traveling salesman problem with precedence constraints. *Computational Optimization and Applications*. 2000;17(1):61–84. DOI: 10.1023/A:1008779125567.
26. Malik A., Sharma A., Saroha V. Greedy Algorithm. *International Journal of Scientific and Research Publications*. 2013;3(8).
27. Tavaeva A., Petunin A., Ukolov S. et al. A Cost Minimizing at Laser Cutting of Sheet Parts on CNC Machines. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Communications in Computer and Information Science*. 2019;1090:422–437. DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2\_33.

## REFERENCES

1. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J.A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020;1072:214–221. DOI: 10.1007/978-3-030-33585-4\_21.
2. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007;183:1109–1130. DOI: 10.1016/j.ejor.2005.12.047.
3. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. A review of cutting path algorithms for laser cutters. *Int.J. Adv. Manuf. Technol*. 2016;87(5-8):1865–1884. DOI: 10.1007/s00170-016-8609-1.
4. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Optimal routing *Optimal routing of CNC sheet cutting machine equipment. Mathematic models and algorithms*. Ekaterinburg, UrFU; 2020. 247 p. (In Russ.).
5. Kuznetsov P.M., Yagopol'skii A.G. Optimizing the idling path of large metal-cutting machines. *Russian Engineering Research*. 2020:1081–1083. DOI: 10.3103/S1068798X20120382.

6. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A discrete – continuous routing problem with precedence constraints. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2018;300(1):56–71. DOI: 10.1134/S0081543818020074.
7. Tavaeva A.F., Petunin A.A. Algorithm for solving the integrated problem of the rectangular parts nesting and tool routing for CNC sheet cutting machines. *Lecture Notes in Electrical Engineering* (in press).
8. Oliveira L., Silva E., Oliveira J. et al. Integrating irregular strip packing and cutting path determination problems: A discrete exact approach. *Comput. Ind. Eng.* 2020;149:1–9. DOI: 10.1016/j.cie.2020.106757.
9. Qi D., Rao Y. An integrated approach on cut planning and nesting for metal structures manufacturing. *Journal of Engineering Manufacture*. 2014;228(4):527–539. DOI: 10.1177/0954405413500979.
10. Salem K.H., Oliveira J.F., Silva E. Cutting and packing problems under uncertainty: literature review and classification framework. *International Transactions in Operational Research*. 2023;30(13). DOI: 10.1111/itor.13318.
11. Eapen N., Heckendorn R.B. PENGRAV: a practical polynomial time algorithm for optimizing the engraving path of an automatic engraving machine using a 3/2 approximation algorithm. *Int. J. of Advanced Manufacturing Technology*. 2022;123(3). DOI: 10.1007/s00170-022-10148-9.
12. Lui X., Chang D. An improved method for optimizing CNC laser cutting paths for ship hull components with thicknesses up to 24 mm. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11(3). DOI: 10.3390/jmse11030652.
13. Cuellar D., Palacio A., Ospina E., Botero M. et al. Modeling and solving the endpoint cutting problem. *Int. Transactions in Operational Research*. 2021;30(12). DOI: 10.1111/itor.13091.
14. Leao A., Toledo F., Oliveria J., Carravilla M. Irregular packing problems: A review of mathematical models. *European journal of operational research*. 2019;282(3):803–822. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.04.045.
15. Guo B., Zhang Y., Hu J et al. Two-dimensional irregular packing problems: A review. *Front. Mech. Eng.* 2022;79:1–15. DOI: 10.3389/fmech.2022.966691.
16. Mezghani S., Haddar B., Chabchoub H. The evolution of rectangular bin packing problem – A review of research topics, applications, and cited papers. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 2022;19(5). DOI: 10.3934/jimo.2022088.
17. Nascimento D., Cherri A., Oliveira J. The two-dimensional cutting stock problem with usable leftovers: mathematical modelling and heuristic approaches. *Oper Res Int J.* 2022;22:5363–5403. DOI: 10.1007/s12351-022-00735-9.
18. Amaro J., Santos M., de Carvalho G et al. Metaheuristics for the minimum time cut path problem with different cutting and sliding speeds. *Algorithms*. 2021;14(11):305. DOI: 10.3390/a14110305.
19. Junior B., Carvalho G., Santos M. Evolutionary algorithms for optimization sequence of cut in the laser cutting Path Problem. *Applied Sciences*. 2023;13(18). DOI: 10.3390/app131810133.
20. Hajad M., Saerang V., Jaturanonda C., Dumkum C. Laser cutting path optimization with minimum heat accumulation. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2019;105(3). DOI: 10.1007/s00170-019-04455-x.
21. Levichev N., García A., Dewil R et al. A virtual sensing approach for quality and productivity optimization in laser flame cutting. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2022;121(9-10). DOI: 10.1007/s00170-022-09750-8.

22. Tavaeva A., Petunin A., Polishchuk E. Methods of cutting cost minimizing in problem of tool route optimization for CNC laser machines. *International Conference on Industrial Engineering*. 2020;447–455. DOI: 10.1007/978-3-030-22063-1\_48.
23. Tavaeva A.F., Petunin A.A. The algorithm for solving of integrated nesting and routing problem on the example of standard parts for sheet cutting equipment with computer numerical control. *Vestnik BSU*. 2022;27(3):535–540. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.3.8. (In Russ.).
24. Tavaeva A.F., Petunin A.A. A new algorithm of shaping and routing for computer-aided design of control programs of sheet cutting equipment with numerical control. *Vestnik USURT*. 2022;56(4):21–27. DOI: 10.20291/2079-0392-2022-4-21-27. (In Russ.).
25. Ascheuer N., Junger M., Reinelt G. A Branch & cut algorithm for the asymmetric traveling salesman problem with precedence constraints. *Computational Optimization and Applications*. 2000;17(1):61–84. DOI: 10.1023/A:1008779125567.
26. Malik A., Sharma A., Saroha V. Greedy Algorithm. *International Journal of Scientific and Research Publications*. 2013;3(8).
27. Tavaeva A., Petunin A., Ukolov S. et al. A Cost Minimizing at Laser Cutting of Sheet Parts on CNC Machines. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Communications in Computer and Information Science*. 2019;1090:422–437. DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2\_33.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Таваева Анастасия Фидагилевна**, кандидат технических наук, главный специалист, Уральский оптико-механический завод им. Э.С. Яламова; младший научный сотрудник, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация.  
*e-mail*: [tavaeva\\_a\\_f@bk.ru](mailto:tavaeva_a_f@bk.ru), [a.f.tavaeva@urfu.ru](mailto:a.f.tavaeva@urfu.ru)  
ORCID: [0000-0001-9770-4298](https://orcid.org/0000-0001-9770-4298)

**Anastasiya F. Tavaeva**, Candidate of Technical Sciences, Chief Specialist at Ural Optical and Mechanical Plant named after E.S. Yalamov, Junior Research Associate at Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation.

**Петунин Александр Александрович**, доктор технических наук, доцент, профессор, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация.  
*e-mail*: [aapetunin@urfu.ru](mailto:aapetunin@urfu.ru)  
ORCID: [0000-0003-2540-1305](https://orcid.org/0000-0003-2540-1305)

**Aleksandr A. Petunin**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, the Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 08.10.2023; одобрена после рецензирования 24.10.2023; принята к публикации 02.11.2023.*

*The article was submitted 08.10.2023; approved after reviewing 24.10.2023; accepted for publication 02.11.2023.*