УДК 517.929.2
DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.029

Оптимизация дискретно-временной системы переноса сплошной среды по сетевому носителю

З. Тран[1]✉, А.С. Гунькина[2]

[1]Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
[2]Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация
tranduysp94@gmail.com✉

Резюме. В технологиях транспортировки сплошных сред (газа, нефти, нефтепродуктов и пр.) используются носители (трубопроводные и магистральные сети), топологическая структура которых аналогична структуре геометрического графа. Вопросам математического моделирования процессов переноса по таким носителям, а также связанным с ними анализом различного рода задач оптимизации посвящено немало работ, однако математическое обоснование полученных результатов недостаточно в рамках общей математической теории теплопереноса и массопереноса. В работе рассматривается задача оптимизации дифференциально-разностной системы, которая определяет дискретно-временной аналог дифференциальной системы для уравнения переноса на графе (в приложениях – на сети). Используется метод Е. Ротэ, основанный на полудискретизации по временной переменной начально-краевой задачи, позволяющий установить не только условия разрешимости указанной задачи, но и получить оптимизационную задачу для дифференциально-разностной системы. При этом свойство коэрцитивности билинейной дифференциальной формы эллиптического оператора и непрерывность минимизируемого квадратичного функционала являются необходимыми и достаточными условиями однозначной разрешимости оптимизационной задачи. Полученные результаты применимы при моделировании сетеподобных процессов переноса сплошных сред формализмами дифференциально-разностных систем с пространственной переменной, изменяющейся на сетеподобной многомерной области. Представлены условия, определяющие решение оптимизационной задачи или множество таких решений. При этом намечены подходы к анализу задачи оптимизации системы, определенной на многомерной сетеподобной области. Полученные результаты лежат в основе анализа задач оптимального управления дифференциальными системами с распределенными параметрами на графе, имеющие интересные аналогии с многофазовыми задачами многомерной гидродинамики.

Ключевые слова: дифференциально-разностные системы, пространственная переменная на графе, задача оптимизации, начально-краевая задача, сеть (ориентированный граф).

Для цитирования: Тран З., Гунькина А.С. Оптимизация дискретно-временной системы переноса сплошной среды по сетевому носителю. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2022;10(2). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1190 DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.029

Optimization of a discrete-time system for transferring a continuous medium over a network carrier

D. Tran[1]✉, A.S. Gunkina[2]

[1]Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
[2]N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation
tranduysp94@gmail.com✉

Abstract. The technologies for transferring continuous media (gas, oil, petroleum products, etc) use carriers (main pipelines) with a topological structure similar to that of a geometrical graph. A large volume of literature is devoted to the issues of mathematical modeling of transfer processes along such carriers as well as to the analysis of various kinds of optimization problems related to them, but the mathematical justification of the findings is not sufficient from the standpoint of the general mathematical theory of heat and mass transfer. The paper considers the problem of a differential-difference system optimization, which determines the discrete-time equivalent of a differential system for the transport equation on a graph (in applications, on a network). E. Rote's method is employed, which is based on semi-discretization with respect to the time variable of the initial-boundary value problem, which helps to establish not only the conditions for the solvability of the specified problem, but also to obtain an optimization problem for the differential-difference system. Moreover, the coercive property of the elliptic operator bilinear differential form and the continuity of the quadratic functional being minimized are necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem. The findings are applicable in modeling network-like processes of continuum transport by formalisms of differential-difference systems with a spatial variable fluctuating on a network-like multidimensional domain. The conditions that determine the solution of the optimization problem or the set of such solutions are presented. Concurrently, approaches to the analysis of the optimization problem for a system defined on a multidimensional network-like domain are outlined. The findings underlie the analysis of optimal control problems for differential systems with distributed parameters on a graph, which have interesting analogies with multiphase problems of multidimensional hydrodynamics.

Keywords: differential-difference system, spatial variable on a graph, optimization problem, initial-boundary value problem, network (directed graph).

For citation: Tran D., Gunkina A.S. Optimization of a discrete-time system for transferring a continuous medium over a network carrier. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(2). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1190 DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.029 (In Russ.).

Введение

Задачи оптимизации дифференциальных систем с изменяющейся на графе пространственной переменной ранее были рассмотрены авторами в работах [1-3]. При этом изучались и смежные вопросы: устойчивость по Ляпунову и Нейману, стабилизация слабых решений, временное запаздывание [2, 4]. Переход к дифференциально-разностным системам явился следующим естественным шагом исследования – попытка приблизится к решению прикладных задач, имеющих свою специфику. Используемый метод полудискретизации является универсальным методом, дающим эффективный инструмент для отыскания условий существования единственного обобщенного решения, а также непрерывности этого решения по начальным данным для дифференциально-разностной системы. Анализ задачи оптимизации дифференциально-разностной системы допускает естественное в таких случаях дополнительное исследование задачи с временным запаздыванием. Также в работе можно увидеть пути переноса полученных результатов на случай анализа задач оптимального управления с носителями на сетеподобных областях.

Основные понятия и предложения

Для описания области изменения пространственной переменной x введем геометрический граф Γ с ребрами γ, ориентированными и параметризованными отрезком $[0, 1]$; совокупность всех его ребер, с удаленными концевыми точками обозначим символом Γ_0, а также введем следующие обозначения: $\overline{\Gamma}_0 = \Gamma$, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ и $J(\Gamma)$, $\partial\Gamma$ – множество внутренних и граничных узлов, соответственно.

Ниже везде используются классические пространства Лебега и Соболева: $L_p(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma_T)$ ($p=1,2$) – пространства, элементами которых являются суммируемые с p-й степенью на Γ_0 или Γ_T функции; $W_2^1(\Gamma)$ – пространство, элементами которого являются функции $u(x)\in L_2(\Gamma)$ с обобщенными производными $\dfrac{du(x)}{dx}\in L_2(\Gamma)$; $L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство, элементами которого являются суммируемые на Γ_T функции $u(x,t)$, $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\|u\|_{2,1,\Gamma_T}=\int\limits_0^T(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt.$

В области Γ_T относительно функции $y(x,t)$ рассмотрим параболическое уравнение:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)y(x,t)=f(x,t),\ x,t\in\Gamma_T, \tag{1}$$

с измеримыми и ограниченными на Γ_0 коэффициентами $a(x)$, $b(x)$; $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Полудискретизация по временной переменной t (метод Ротэ [5]), примененная к уравнению (1), приводит к дифференциально-разностной системе (уравнению)

$$\frac{1}{\tau}(y(k)-y(k-1))-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k)}{dx}\right)+b(x)y(k)=f_\tau(k),\ k=1,2,...,M, \tag{2}$$

являющейся дискретно-временной системой, аппроксимирующей уравнение (1), здесь $y(k):=y(x;k)$ и $f_\tau(k)=\dfrac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau}f(x,t)dt\in L_2(\Gamma)$, $k=1,2,...,M$.

Для функций $y(k)$ ($k=1,2,...,M$) системы (2) определим пространство состояний. Введем совокупность $\Omega_a(\Gamma)$ дифференцируемых функций $y(x)$, обладающих односторонними производными в концевых точках ребер, для которых имеют место соотношения

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)}a(1)_\gamma\frac{dy(1)_\gamma}{dx}=\sum_{\gamma\in r(\xi)}a(0)_\gamma\frac{dy(0)_\gamma}{dx}\quad\forall\xi\in J(\Gamma), \tag{3}$$

через $R(\xi)$ и $r(\xi)$ здесь обозначены наборы ребер γ, ориентация которых определена «к узлу ξ» и «от узла ξ», соответственно, сужение функции $\theta(\cdot)$ на ребро γ обозначается символом $\theta(\cdot)_\gamma$. Пространство $W^1(a;\Gamma)$ вводится как замыкание совокупности функций $\Omega_a(\Gamma)$ по норме $W_2^1(\Gamma)$. Если $y(x)|_{\partial\Gamma}=0$ для всех $y(x)\in\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и условию $y(x)|_{\partial\Gamma}=0$, тогда замыкание $\Omega_a(\Gamma)$ дает пространство $W_0^1(a;\Gamma)$. Таким образом, дифференциально-разностному уравнению (2) будем ставить в соответствие два пространства – $W^1(a;\Gamma)$, $W_0^1(a;\Gamma)$, при этом оба являются подпространствами $W_2^1(\Gamma)$.

Пусть функции $y(k)$ удовлетворяют условиям

$$y(0)=\varphi(x),\ y(k)|_{x\in\partial\Gamma}=\psi(x),\ k=1,2,...,M, \tag{4}$$

первое – начальное условие, остальные M – краевые условия, соотношения (3) – условия согласования во внутренних узлах графа Γ; система (2), (4) образует краевую задачу для совокупности функций $y(k)$ ($k=1,2,...,M$). Если $\psi(x)=0,\ x\in\Gamma$, тогда система (2), (4) рассматривается в пространстве $W_0^1(a;\Gamma)$, в противном случае – в пространстве $W^1(a;\Gamma)$, последнее используется для анализа системы (2), (4) с более общими краевыми условиями.

Замечание 1. В приложениях система (1) используется в математических моделях процессов транспортировки сплошных сред по сетевым носителям при отсутствии вихревых явлений [2, 6].

Определение 1. Совокупность функций $\left\{y(k)\in W_0^1(a;\Gamma),\ k=1,2,...,M\right\}$ называется слабым решением системы (2), (4), если для каждого $k=1,2,...,M$ функция $y(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_\Gamma y(k)_t\eta(x)dx+\ell(y(k),\eta)=\int_\Gamma f_\tau(k)\eta(x)dx \quad \forall\,\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma).$$

Здесь $y(k)_t=\dfrac{1}{\tau}[y(k)-y(k-1)]$; $\ell(y(k),\eta)$ – билинейная форма относительно $y(k)$ и η:

$$\ell(y(k),\eta)=\int_\Gamma\left(a(x)\frac{dy(x;k)}{dx}\frac{d\eta(x)}{dx}+b(x)y(x;k)\eta(x)\right)dx.$$

Замечание 2. Из определения 1 следует, что для каждого фиксированного $k=1,2,...,M$ соотношения (2), (4) – краевая задача в пространстве $W_0^1(a,\ \Gamma)$ для эллиптического уравнения (2) относительно $y(k)$.

Имеет место следующее утверждение [6].

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ и выполнены условия

$$0<a_*,,\ a(x),,\ a^*,|b(x)|,,\ \beta,x\in\Gamma_0. \qquad (5)$$

Тогда решение системы (2), (4), т. е. функции $y(k)$ $(k=1,2,...,M)$, при достаточно малых значения τ однозначно определяется элементами пространства $W_0^1(a;\ \Gamma)$.

Доказательство утверждения теоремы опирается на свойство базисности в пространствах $W_0^1(a;\ \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$ системы обобщенных собственных функций одномерного эллиптического оператора Λ, порожденного дифференциальным выражением $\Lambda\phi=-\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{d\phi(x)}{dx}\right)+b(x)\phi(x)$ [7]. При этом, если выполнены условия (5), то (см. [7]) оператор Λ обладает системой собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ (собственные значения λ_k вещественные) и обобщенных собственных функций $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$; для задачи $\Lambda\phi=\lambda\phi+g$, $g\in L_2(\Gamma)$, имеет место альтернатива Фредгольма. Исходя из этого, при любом $k=1,2,...,M$ получаем однозначную разрешимость относительно $y(k)$ краевой задачи

$$\Lambda y(k)=-\frac{1}{\tau}y(k)+f_\tau(k)+\frac{1}{\tau}y(k-1)$$

для $0 < \tau < \tau_0$ при достаточно малом положительном τ_0.

Алгоритм построения приближенного решения дифференциально-разностного уравнения (2)

Результаты раздела 2 определяют алгоритм построения приближений к решению дифференциально-разностного уравнения (2).

1. Формируется сетка Γ_h графа Γ с шагом деления h каждого ребра (выбор шага зависит от количества точек разбиения на каждом ребре).

2. Соотношения

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{dy(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{dy(0)_\gamma}{dx},$$

определенные в каждом внутреннем узле $\xi \in J(\Gamma)$ графа (см. описание множества $\Omega_a(\Gamma)$), аппроксимируются разностными отношениями для производных.

3. При каждом фиксированном k $(k = 1, 2, \ldots, M)$ строится неявная разностная схема для дифференциально-разностной системы (2).

4. По полученным разностным схемам на каждом ребре графа и аппроксимациям соотношений во внутренних узлах формируется алгебраическая система, линейная относительно $y(nh;k)$, где $y(nh;k)$ – значения сеточной функции $y(k)_h$, соответствующей $y(k)$, n принадлежит множеству индексов сетки Γ_h.

5. Осуществляется решение полученной системы; значения $y(k)_h := y(nh;k)$ определяют приближения к функциям $y(k) \in W_0^1(a;\Gamma)$ ($k = 1, 2, \ldots, M$).

Задача оптимизации

Обратимся к задаче оптимизации дифференциально-разностной системы (2), (4). Пусть задано пространство управлений U (задается в зависимости от характера прикладных задач, везде ниже $U = L_2(\Gamma)$) и линейный оператор $B: U \to L_2(\Gamma)$. Обозначим через $y(k; v(k)) := y(x, k; v(k))$, где $v(k) := v(x;k) \in U$ ($k = 0, 1, \ldots, M$), решение системы

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}[y(k; v(k)) - y(k-1; v(k-1))] - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k;\, v(k))}{dx}\right) + b(x)y(k; v(k)) = \\ &= f_\tau(k) + Bv(k),\ k = 1, 2, \ldots, M,\end{aligned} \tag{6}$$

$$y(0; v(0)) = \varphi(x),\ y(k; v(k))|_{x\in\partial\Gamma} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, M. \tag{7}$$

Функции $y(k;v(k))$ описывают состояние системы (6), (7), наблюдение задается линейным оператором $C: W_0^1(a;\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, т. е. $w(k; v(k)) := w(x, k; v(k)) = Cy(k; v(k))$. Как следует из утверждения теоремы 1, решение системы (2), (4) непрерывно зависит от $v(k)$ для любого $k = 1, 2, \ldots, M$ в пространстве $W_0^1(a;\Gamma)$.

Определение 2. Совокупность функций $\left\{y(k) \in W_0^1(a;\Gamma),\ k = 1, 2, \ldots, M\right\}$ называется слабым решением системы (6), (7), если для каждого $k = 1, 2, \ldots, M$ функция $y(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{\Gamma} y(k;\, v(k))_t\, \eta(x)dx + \ell(y(k;\, v(k)),\, \eta) = \int\limits_{\Gamma} f_\tau(k)\eta(x)dx + (Bv(k),\, \eta)_U\,,\ \forall\, \eta(x) \in W_0^1(a,\, \Gamma).$$

Определим минимизирующий функционал $\Psi(v)$ соотношением

$$\Psi(v) := \Psi(v(1),\, v(2),\ldots,\, v(M)) = \tau\sum_{n=1}^{M}\Psi_k(v(k)),$$

$$\Psi_k(v(k)) = \| Cy(k;\, v(k)) - w_0(k)\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),\, v(k))_U\,,$$

где $w_0(k)$ ($k = 1,\, 2,\ldots, M$) – заданные элементы пространства $L_2(\Gamma)$ и $N : U \to U$ – линейный положительно определенный эрмитов оператор, для которого выполнены условия

$$(N(v(k),\, (v(k))_U \geq \varsigma \| v(k)\|^2_U\,,\ \varsigma > 0\ \forall v(k) \in U,\ \ k = 1,\, 2,\ldots, M; \tag{8}$$

здесь и везде ниже символом $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в пространстве $L_2(\Gamma)$, если это не оговорено специально.

Пусть далее $U_\partial \subset U$ – выпуклое множество: $\bar{U}_\partial = U_\partial$. Задача оптимизации системы (6), (7) заключается в определении

$$\inf_{v\in U_\partial}\Psi(v),\ v = \{v(k),\, k = 1,\, 2,\ldots, M\}.$$

Теорема 2. Пусть $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)\,, x \in \Gamma_0$ выполнены условия $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$ и $|b(x)| \leq \beta$, тогда задача (9) для системы (6), (7) при достаточно малых значения τ однозначно разрешима: $\Psi(v^*) = \inf\limits_{v\in U_\partial}\Psi(v)$, $v^* = \{v^*(k),\, k = 1,\, 2,\ldots, M\} \subset U_\partial$ – оптимальное управление системы (6), (7).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что отображение $v \to y(v)$, т. е. отображение $U_\partial \to W_0^1(a,\, \Gamma)$ непрерывно. Отсюда следует непрерывность функционала $\Psi(v)$ по v. Из вида функционала $\Psi(v)$ имеем

$$\Psi_k(v(k)) = \| Cy(k;v(k)) - w_0(k)\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),v(k))_U =$$

$$= \| C(\,y(k;v(k)) - y(0;v(0))) + Cy(0;v(0)) - w_0(k)\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),v(k))_U =$$

$$= \mathsf{F}_k(v(k),v(k)) - 2\mathsf{L}_k(v(k)) + \| Cy(0;v(0)) - w_0(k)\|^2_{L_2(\Gamma)},$$

для произвольного $k = 1,\, 2,\ldots, M$. Заметим при этом, что на множестве U_∂ выражение

$$\mathsf{F}_k(v(k),(v(k)) = (C(\,y(k;\, v(k)) - y(0;\, v(0))),\ C(\,y(k;\, v(k)) - y(0;\, v(0)))) + (Nv(k),\, v(k))_U$$

определяет, учитывая (8), коэрцитивную квадратичную форму, а выражение

$$\mathsf{L}_k(v(k)) = \left(w_0(k) - Cy(0;v(0)), C(\,y(k;v(k)) - y(0;v(0)))\right)$$

линейную форму. Тогда имеет место представление

$$\Psi(v)=\mathsf{F}(v,v)+\mathsf{L}(v),\ \ \mathsf{F}(v,v)=\tau\sum_{n=1}^{M}\mathsf{F}_k(v(k),v(k)),\ \ \mathsf{L}(v)=\tau\sum_{n=1}^{M}\mathsf{L}_k(v(k)).$$

Доказательство завершается рассуждениями, приведенными в [8, с. 13].

Замечание 2. В случае $N=0$ можно показать, что при выполнении условий теоремы 1 существует непустое замкнутое и выпуклое подмножество $U_\partial^0\subset U_\partial$ такое, что

$$\Psi(v^*)=\inf_{v\in U_\partial}\Psi(v)\quad\forall v\in U_\partial^0.$$

Доказательство этого факта аналогично представленному в работе [8, теорема 5.2 с. 47]. Далее остановимся на подробном изучении условий существования оптимального управления и получим соотношения, определяющие оптимальное управление. Для упрощения представлений различных преобразований дальнейшие действия проводятся одновременно для всех состояний $y(k;u(k))$ и управлений $u(k)$, $k=1,2,...,M$; обозначения $y(k;u(k))$, $y(k;u(k))_t$ и $u(k)$ заменяются на $y(u)$, $y(u)_t$ и u, соответственно. Рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u^*=\{u^*(k),k=1,2,...,M\}\in U_\partial$ – минимизирующий элемент функционала $\Psi(v)$, тогда выполняется неравенство

$$\Psi'(u^*)(v-u^*)\ge 0\quad\forall v\in U_\partial. \tag{10}$$

Доказательство. Так как u^* – минимизирующий элемент функционала $\Psi(v)$, то для любого $v\in U_\partial$ и любого числа $\theta\in(0,1)$ справедливо неравенство $\Psi(u^*)\le\Psi((1-\theta)u^*+\theta v)$, а это означает, что

$$\frac{1}{\theta}[\Psi((1-\theta)u^*+\theta v)-\Psi(u^*)]=\frac{1}{\theta}[\Psi(u^*+\theta(v-u^*))-\Psi(u^*)]\ge 0$$

и при $\theta\to 0$ $\Psi'(u^*)(v-u^*)\ge 0$, откуда следует (10). Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть для некоторого фиксированного $u\in U_\partial$ справедливо неравенство $\Psi'(u)(v-u)\ge 0$ для любого $v\in U_\partial$. В силу выпуклости отображения $v\to\Psi(v)$ (см. доказательство теоремы 2) имеют место соотношения

$$\frac{1}{\theta}[\Psi((1-\theta)u+\theta v)-\Psi(u)]=\frac{1}{\theta}[\Psi(u^*+\theta(v-u^*))-\Psi(u^*)]\le\Psi(v)-\Psi(u)\quad\forall v\in U_\partial,$$

откуда следует $0\le\Psi'(u)(v-u)\le\Psi(v)-\Psi(u)$ для $\theta\to 0$. Это означает $\Psi(v)\ge\Psi(u)$ для произвольных $v\in U_\partial$ и утверждение леммы доказано.

Лемма 2. Для произвольных функций v,u множества U_∂ справедливо соотношение

$$y'(u)(v-u)=y(v)-y(u), \tag{11}$$

где через $y'(u)$ обозначена производная по управлению u.

Доказательство. Учитывая определение 2 для управлений $v(k)$ и $v(k)$ $(k=0,1,...,M)$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{\tau}\int_{\Gamma}[(y(k;v(k))-y(k;u(k)))-(y(k-1;v(k-1))-y(k-1;u(k-1)))]\eta(x)dx+$$
$$+\ell(y(k;v(k))-y(k;u(k)),\eta)=(B(v(k)-u(k),\eta)_U,\ \forall\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma). \tag{12}$$

Проводя несложные преобразования, получим

$$\frac{1}{\tau}\int_{\Gamma}[(y(k;u(k)+\vartheta(v(k)-u(k)))-y(k;u(k)))-(y(k-1;u(k-1)+\vartheta(v(k-1)-u(k-1)))-$$
$$-y(k-1;u(k-1)))]\eta(x)dx++\ell(y(k;u(k)+\vartheta(v(k)-u(k)))-y(k;u(k)),\eta)=\vartheta(B(v(k)-u(k),\eta)_U,$$
$$\forall\vartheta\in(0,1),\ \eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma).$$

После деления последнего соотношения на ϑ и последующего перехода к пределу при $\vartheta\to 0$, получаем соотношение

$$\frac{1}{\tau}\int_{\Gamma}[y'(k;u(k))(v(k)-u(k))-y'(k-1;u(k-1))(v(k-1)-u(k-1))]\eta(x)dx+$$
$$+\ell(y'(k;u(k))(v(k)-u(k)),\eta)=(B(v(k)-u(k),\eta)_U,\ \forall\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma). \tag{13}$$

При сравнении левых частей (12) и (13), приходим к равенствам

$$y'(k;u(k))(v(k)-u(k))=y(k;v(k))-y(k;u(k)),\ k=0,1,...,M,$$

которые завершают доказательство.

Пусть $u(k)$ является оптимальным управлением для каждого фиксированного $k=1,2,...,M$, тогда в силу (10) и (11) имеем

$$\frac{1}{2}\Psi'_k(u(k))(v(k)-u(k))=(Cy(k;u(k))-w_0(k),\ Cy'(k;u(k))(v(k)-u(k)))+$$
$$+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_U=(Cy(k;u(k))-w_0(k),\ C(y(k;v(k))-y(k;u(k))))+$$
$$(Nu(k),\ v(k)-u(k))_U\geq 0 \tag{14}$$

для любого $v(k)\in U_\partial$.

Обозначим через C^* оператор, сопряженный с C, тогда соотношение (14) принимает вид

$$(C^*(Cy(k;u(k))-w_0(k)),\ y(k;v(k))-y(k;u(k)))+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_U\geq 0, \tag{15}$$

а значит, исходя из представления (8) функционала $\Psi(v)$ и соотношения (10), приходим к неравенству

$$\tau\sum_{k=1}^{M}[(C^*(Cy(k;u(k))-w_0(k)),\ y(k;v(k))-y(k;u(k)))+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_U]\geq 0 \tag{16}$$

для любого $v(k)\in U_\partial$. Таким образом, неравенство (16) представляет условие существования оптимального управления системой (6), (7).

Более детальное описание таких условий можно получить, используя сопряженное состояние для системы (6), (7). В пространстве $W_0^1(a;\Gamma)$ введем понятие сопряженного состояния $p(k;v(k))$ ($k=1,2,...,M$) и сопряженной системы к системе (6), (7), для чего воспользуемся очевидным равенством

$$\tau\sum_{k=1}^{M}\mu(k)_t\eta(k)=-\tau\sum_{k=0}^{M-1}\mu(k)\eta(k)_{t'}-\mu(0)\eta(0)+\mu(M)\eta(M)$$

для произвольных функций $\mu(k)$ и $\eta(k)$, исходя из которого определим сопряженное состояние $p(k;v(k))$ ($k=1,2,...,M$) для управления $v(k)$ ($k=1,2,...,M$) как решение сопряженной задачи

$$-\frac{1}{\tau}[p(k+1;v(k+1))-p(k;v(k))]-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dp(k;v(k))}{dx}\right)+b(x)p(k;v(k))= \quad (17)$$
$$=C^*(Cy(k;v(k))-w_0(k)),\ k=0,1,...,M-1,$$

$$p(M;v(M))=0,\ p(k;v(k))|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ k=0,1,...,M-1 \quad (18)$$

для дифференциально-разностной системы (2), (4).

Теорема 3. При достаточно малых значения τ решение системы (17), (18) однозначно определяется элементами пространства $W_0^1(a;\Gamma)$.

Доказательство. Чтобы в этом убедиться, достаточно перенумеровать соотношения системы (17), (18) и применить утверждение леммы 1. Действительно, меняя нумерацию по закону $l=M-k$, $k=M,M-1,...,1,0$, получим, что l меняется от 0 до M и мы приходим к системе

$$-\frac{1}{\tau}[\overline{p}(l-1;v(l-1))-\overline{p}(l;v(l))]-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\overline{p}(l;v(l))}{dx}\right)+b(x)\overline{p}(l;v(l))=$$

$$\overline{p}(0;v(0))=0,\ \overline{p}(l;v(l))|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ l=1,2,...,M,$$

для которой справедливо утверждение теоремы 1.

Дальнейшие рассуждения основаны на преобразованиях неравенства (15) при $k=1,2,...,M$. Учитывая соотношения

$$-\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{M-1}[p(k+1;u(k+1))-p(k;u(k))][y(k;v(k))-y(k;u(k))]=$$
$$=\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{M}\left\{[y(k;v(k))-y(k;u(k))]-[y(k-1;v(k-1))-y(k-1;u(k-1))]\right\}p(k;u(k)),$$

$$\sum_{k=0}^{M-1}\ell(p(k;u(k)),y(k;v(k))-y(k;u(k)))=\sum_{k=1}^{M}\ell(y(k;v(k))-y(k;u(k)),p(k;u(k))),$$

после несложных преобразований получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{M-1}\left(C^*(Cy(k;v(k))-w_0(k)),\ y(k;v(k))-y(k;u(k))\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{M}(Bv(k)-Bu(k),\ p(k;u(k)))=\sum_{k=0}^{M-1}(Bv(k)-Bu(k),\ p(k;u(k)))=$$
$$=\sum_{k=0}^{M-1}(B^*p(k;u(k)),\ v(k)-u(k))_U$$

(напомним, что $y(0;v(0))-y(0;u(0))=0$ и $p(M;u(M))=0$).

Полученное равенство приводит к соотношению

$(C^*(Cy(k;v(k))-w_0(k)), y(k;v(k))-y(k;u(k))) = (B^* p(k;u(k)),\ v(k)-u(k))_U,\ k=0,1,...,M-1,$
и тогда (15) можно переписать в виде

$$(B^* p(k;u(k)) + Nu(k),\ v(k)-u(k))_U \geq 0\ \forall v(k)\in U_\partial,\ k=0,1,...,M,$$

а неравенство (16) преобразуется к виду

$$\tau\sum_{k=0}^{M}(B^* p(k;u(k)) + Nu(k),\ v(k)-u(k))_U \geq 0,\ \forall v(k)\in U_\partial, k=0,1,...,M,$$

(как и выше, учитывается $y(0;v(0))-y(0;u(0))=0$ и $p(M;u(M))=0$).

Исходя из сказанного, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5). Если множество U_∂ ограничено, тогда оптимальное управление $u=\{u(k)\in U_\partial, k=0,1,...,M\}$ и ему соответствующие состояния $y(k;\ u(k)),\ p(k;\ u(k))\in W_0^1(a;\ \Gamma)$, $k=0,1,...,M$, определяются решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}[y(k;u(k))-y(k-1;u(k-1))] - \dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{dy(k;\ u(k))}{dx}\right) + b(x)y(k;u(k)) = \\ \qquad = f_\tau(k) + Bu(k),\ k=1,2,...,M;\ y(0;u(0)) = \varphi(x), \\ -\dfrac{1}{\tau}[p(k+1;u(k+1))-p(k;u(k))] - \dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{dp(k;\ u(k))}{dx}\right) + b(x)p(k;u(k)) = \\ \qquad = C^*(Cy(k;u(k))-w_0(k)),\ k=0,1,...,M-1;\ p(M;u(M))=0, \\ \qquad (B^* p(k;u(k)) + Nu(k), v(k)-u(k))_U \geq 0,\ \forall v(k)\in U_\partial,\ k=0,1,...,M. \end{cases}$$

Полученные результаты нетрудно переносятся на случай пространственной переменной $x\in\mathrm{R}^n$, $n\geq 2$. В R^n возьмем сетеподобную область $\Im$, определенную N ограниченными областями $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$) и M узловыми местами ω_j ($j=\overline{1,M}$, $M<N$). Области $\Im_k$ в узловых местах ω_j имеют общие границы в виде поверхностей S_j (meas $S_j>0$). В каждом узловом месте ω_j поверхность S_j состоит из m_j областей $\Im_{k_0}$ и $\Im_{k_i}$ ($1\leq i\leq m_j\leq N-1$). Граница $\partial\Im$ области $\Im$ состоит из объединения границ $\partial\Im_k$ областей $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$), причем учитываются только те части $\partial\Im_k$, которые не содержат S_j ($j=\overline{1,M}$): $\partial\Im=\bigcup_{k=1}^{N}\partial\Im_k\setminus\bigcup_{j=1}^{M}S_j$. Таким образом, $\Im$ имеет структуру геометрического графа (см. также работы [9, 10]). Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше.

Заключение

В работе представлен подход, основанный на аппроксимации дифференциального уравнения (1) с использованием метода полудискретизации по временной переменной (метод E. Rothe [5]). Установлены условия, гарантирующие единственность решения оптимизационной задачи. Редукция к дифференциально-разностным системам явилась естественным шагом к решению задач, имеющих прикладную специфику. Используемый метод полудискретизации является универсальным методом, дающим эффективный инструмент для алгоритмизации задач оптимизации [11-17]. Также в работе указан путь переноса полученных результатов на многомерный случай задач оптимизации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;32(2.2):293–297.
2. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S., The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Procedia Computer Sciense*. 2017;103:324–330(accessed 10/2/2022).
3. Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из М струн. *Вестник Санкт-Петербургского университета*. *Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2012;1:60–69.
4. Волкова А.С., Махинова О.А. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе. *Системы управления и информационные технологии*. 2014;1(55):19–22.
5. Rothe E. Warmeleitungsgleichungen mit nichtconstanten koeffizienten. *Thermal conductivity equations with non-constant coefficients*. Math. Ann.1931;104:340–362. (In German) (accessed 10/2/2022).
6. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Hoang V.N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.2020;16(4):402–414. Available at: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.405 (accessed 10/2/2022).
7. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе. *Известия вузов*. Математика. 2014;3:3–18.
8. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. Москва, Мир; 1972. 414 с.
9. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. *Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2017;13(4):431–443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 10/2/2022).
10. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of nonisothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics*. *Conference Series.* 2019;1203:012094. Available at: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094 (accessed 10/2/2022).
11. Волкова А.С. Аппроксимация краевой задачи для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе. *Системы управления и информационные технологии*. 2014;1.1(55):117–121.
12. Тран З., Парт А.А. Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(4). Доступно по https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1090 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037.
13. Тран З., Провоторов В.В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(3). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012
14. Sergeev S.M. Cross-system way of looking to business with limited resources. In the collection: *Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" Winter-2016 (Varna, Bulgaria)* Compiling Editor Dr. Sc., Prof. O.Ja. Kravets. Yelm, WA, USA.2016:95–102 (accessed 10/2/2022).

15. Krasnov S., Sergeev S., Titov A., Zotova Y. Modelling of digital communication surfaces for products and services promotion. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019;012032 (accessed 10/2/2022).
16. Krasnov S., Sergeev S., Zotova E., Grashchenko N. Algorithm of optimal management for the efficient use of energy resources. *E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018.* 2019;02052 (accessed 10/2/2022).
17. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019».* 2019;42025 (accessed 10/2/2022).

REFERENCES

1. Provotorov V.V. K voprosu postroeniya granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy «machta-rastyazhkI». *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2008;32(2.2):293–297. (In Russ.)
2. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S., The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Procedia Computer Sciense*. 2017;103:324–330.
3. Provotoro V.V. Postroenie granichnyh upravlenij v zadache o gashenii kolebanij sistemy iz M strun. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. *Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija.* 2012;1:60–69. (In Russ.)
4. Volkova A.S., Mahinova O.A. Ustojchivost' raznostnoj shemy dlja jellipticheskogo uravnenija s raspredelennymi parametrami na grafe. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*. 2014;1(55):19–22. (In Russ.)
5. Rothe E. Warmeleitungsgleichungen mit nichtconstanten koeffizienten. *Thermal conductivity equations with non-constant coefficients*. Math. Ann.1931;104:340–362. (In German) (accessed 10/2/2022).
6. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Hoang V.N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University*. *Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2020;16(4):402–414. Available at: https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.405(accessed 10/2/2022).
7. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshhennye reshenija i obobshhennye sobstvennye funkcii kraevyh zadach na geometricheskom grafe. *Izvestija vuzov*. Matematika. 2014;3:3–18. (In Russ.)
8. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody reshenija nelinejnyh kraevyh zadach*. Moskva, Mir; 1972. 414 p. (In Russ.)
9. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. *Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2017;13(4):431–443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 10/02/2022).
10. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of nonisothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics*. *Conference Series.* 2019;1203:012094. Available at: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094 (accessed 10/02/2022).

11. Volkova A.S. Approksimacija kraevoj zadachi dlja jellipticheskogo uravnenija s raspredelennymi parametr ami na grafe. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*. 2014;1.1(55):117–121. (In Russ.)
12. Tran D., Part A.A. Parametric optimization of the continuous medium transferring process over a network carrier. *Modelirovaniye, optimizatsiya i informatsionnyye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(4). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1090. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037 (In Russ.)
13. Tran D., Provotorov V.V. Finite difference method for transfer equation with distributed parameters on the network. *Modelirovaniye, optimizatsiya i informatsionnyye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(3). Available from: 1019 https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012 (In Russ.)
14. Sergeev S.M. Cross-system way of looking to business with limited resources // In the collection: *Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" Winter-2016 (Varna, Bulgaria)* Compiling Editor Dr.Sc., Prof. O.Ja. Kravets. Yelm, WA, USA. 2016:95–102 (accessed 10/2/2022).
15. Krasnov S., Sergeev S., Titov A., Zotova Y. Modelling of digital communication surfaces for products and services promotion. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;012032 (accessed 10/2/2022).
16. Krasnov S., Sergeev S., Zotova E., Grashchenko N. Algorithm of optimal management for the efficient use of energy resources. *E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018.* 2019;02052 (accessed 10/2/2022).
17. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019».* 2019;42025 (accessed 10/2/2022).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Тран Зуй, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: tranduysp94@gmail.com

Tran Duy, Postgraduate Student, Department of Equations in Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

Гунькина Анна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры высшей математики Военно-воздушной академии им. профессора. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: wwprov@mail.ru

Anna Sergeevna Gunkina, Candidate in Physics and Mathematics, Lecturer at The Department of Higher Mathematics of N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 27.05.2022; одобрена после рецензирования 20.06.2022; принята к публикации 30.06.2022.

The article was submitted 27.05.2022; approved after reviewing 20.06.2022; accepted for publication 30.06.2022.