УДК 517.977.56 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012

Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети

З. Тран, В.В. Провоторов
Воронежский государственный университет,
Воронеж, Российская Федерация

Резюме: Вопрос построения решения начально-краевой задачи для эволюционного дифференциального уравнения с пространственной переменной, изменяющейся на сети (геометрическом графе) остается в поле зрения исследователей в течении последних нескольких лет. Тому есть немало причин прикладного характера – большое количество математических моделей, описывающих процессы переноса сплошных сред по сетевым носителям, используют формализмы уравнений с частными производными и им соответствующим начально-краевым задачам. В работе используются как классические подходы аппроксимаций дифференциальных уравнений на линейных фрагментах сети (ребрах графа), так и указаны принципы построения аппроксимаций дифференциальных соотношений, порожденных обобщенными условиями Кирхгофа, в точках сочленения этих фрагментов (в узлах графа). Последнее является отличительной особенностью понятия дифференциального уравнений с пространственной переменной, изменяющейся на сети (графе) и ему соответствующего конечно-разностного аналога от классического уравнения и его конечно-разностного аналога. Изучены вопросы аппроксимации эллиптического оператора начально-краевой задачи (установлена погрешность аппроксимаций), устойчивости двухслойной разностной схемы, проведен детальный анализ ее устойчивости. Разработан алгоритм построения решения, основанный на новых численных методов анализа задач переноса в сложноструктурируемых материалах с неравномерно распределенными свойствами сплошной среды по сетевому носителю. Разработана и тестирована ЭВМ-программа на тестовых задачах, ориентированных на задачи прикладного характера. Полученные результаты могут быть использованы при анализе начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на многомерной сети, имеющих интересные аналогии с многофазными задачами многомерной гидродинамики.

Ключевые слова: начально-краевая задача переноса, сеть (ориентированный граф), слабое решение, конечномерный аналог дифференциального оператора, устойчивость разностной схемы.

Для цитирования: Тран З., Провоторов В.В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(3). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012

Finite difference method for transfer equation with distributed parameters on the network

D. Tran, V.V. Provotorov
Voronezh State University,
Voronezh, Russian Federation

Abstract: The issue of constructing a solution to an initial-boundary value problem for an evolutionary differential equation with a spatial variable varying on a network (geometric graph) has remained under review of researchers over the past few years. There were many practical reasons for this - a large number of mathematical models describing the transport processes of continuous media over network carriers use formalisms of partial differential equations and their corresponding initial-boundary value problems. In this paper, classical approaches were used for approximating differential equations on linear network fragments (graph edges), along with the principles of constructing approximations of differential relations originated from generalized Kirchhoff conditions at the junction points of these fragments (at the graph nodes) were also indicated. The latter was a distinctive feature of differential equations concept with a spatial variable, changing on a network (graph) and its corresponding finite-difference analogue of the classical equation and finite-difference analogue. The problems of the elliptic operator approximation of the initial-boundary value problem were studied (the error of approximations was established), the stability of the two-layer difference scheme and detailed analysis of its stability was carried out. An algorithm for constructing a solution has been developed, based on new numerical methods for analyzing transport problems in materials with complex structure with non-uniformly distributed properties of a continuous medium over a network carrier. A computer program has been developed and tested on test objectives targeted at applied problems. The obtained results can be used in the analysis of initial-boundary value problems for differential equations with distributed parameters on a multidimensional network having interesting analogies with multiphase problems in multidimensional hydrodynamics.

Keywords: initial-boundary value transfer problem, network (directed graph), weak solution, finite-dimensional analogue of differential operators, stability of difference schemes.

For citation: Tran D., Provotorov V.V. Finite difference method for transfer equation with distributed parameters on the network. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(3). Available from: 1019 https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012 (In Russ).

Введение

Для дифференциального уравнения переноса на сети (ориентированный граф, состоящей из m ребер) и ему соответствующей начально-краевой задаче, рассматривается разностная схема, аналогичная классической на одномерном континууме, но имеющая отличительную особенность – в узлах сети (точках сочленения линейных фрагментов сети) используются обобщенные условия согласования Кирхгофа. Редукция дифференциальной задачи к ее конечно-разностному аналогу сохраняет свойства исходной задачи (однозначная разрешимость, непрерывность решения по исходным данным [1, 2], см. также [3, с. 553]). Аппроксимация дифференциального оператора исходной задачи приводит к неявной разностной схеме. Устанавливается погрешность аппроксимации и безусловная устойчивость разностного аналога (непрерывность зависимость решения разностной задачи от исходных данных в пространстве сеточных функций). Линейная система разностных уравнений относительно значений сеточной функции на каждом временном слое решается методом матричной прогонки. Для упрощения представления результатов исследования используется звездная сеть (ориентированный граф-звезда), которая является базовой структурной ячейкой произвольной сети (в том числе и сети, содержащей циклы – замкнутые петли). Предложен алгоритм численного решения рассматриваемой задачи. Полученные результаты несложно переносятся на случай начально-краевых задач с носителями на многомерных сетеподобных областях.

Постановка задачи

Здесь мы придерживаемся обозначений, введенных в работах [4 – 6]. Пусть задан Γ – граф-звезда с узлом ξ и имеющий ребра γ_k $(k=\overline{1,m})$: $\Gamma=\bigcup_{k=1}^{m}\gamma_k$. Ориентация ребра

γ_1 определяется направлением “к узлу ξ”, ребер γ_k ($k=\overline{2,m}$) – “от узла ξ”; ребро γ_1 параметризовано отрезком $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, а каждое ребро γ_k ($k=\overline{2,m}$) – отрезком $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$; узлу ξ ставится в соответствие параметр $\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через $u(x,t)$ функцию распределения температуры в области $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$ изменения переменных x,t, где T – фиксированная положительная постоянная. Процесс распределения тепла описывается уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right),\quad x,t\in\Gamma\times(0,\mathrm{T}), \tag{1}$$

во внутренней части каждого ребра и соотношениями в узле ξ (условия согласования)

$$u\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_1}=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_k}\ (k=\overline{2,m}), \tag{2}$$

$$t\in[0,\mathrm{T}]$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_1}=\sum_{k=2}^{m}\alpha_k\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} \tag{3}$$

Опишем тепловые характеристики системы (1) с условиями согласования (2), (3). Уравнение (1) моделирует классический закон Фурье переноса тепла по непрерывному континууму (внутренних частях ребер), функция $a(x),\ x\in\Gamma,$ описывает теплопроводящие свойства материала фрагментов (ребер) области $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$; первые соотношения (2) условий согласования (2), (3) являются естественным предположением температурного равенства во внутреннем узле, второе соотношение (3) условий согласования (2), (3) устанавливает потоковые тепловые связи во внутреннем узле: тепловые потоки удовлетворяют балансным условиям (обобщенное балансное условие Кирхгофа) с коэффициентами α_k, зависящими от теплопроводящих свойств каждого ребра. Следует отметить, что балансное условие Кирхгофа допускает и более широкую интерпретацию условий согласования в узле ξ, а именно, при наличии стока тепла (или притока извне) в правой части соотношения (3) добавляется линейное слагаемое относительно $\left.u(x,t)\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k}$ с коэффициентами $\beta_k,\ k=\overline{2,m},$ определяющими уровень интенсивности стока (или притока извне) тепла, коэффициенты α_k (и β_k) $k=\overline{2,m},$ считаются известными [6].

Присоединяя к соотношениям (1) – (3) начальное

$$u(x,0)_{\gamma_k}=\varphi(x),\quad x\in\Gamma,\quad k=\overline{1,m}, \tag{4}$$

и граничные условия:

$$u(0,t)_{\gamma_1}=0,\ t\in[0,\mathrm{T}], \tag{5}$$

$$u(\pi,t)_{\gamma_k}=0,\ (k=\overline{2,m}),\ t\in[0,\mathrm{T}], \tag{6}$$

получаем начально-краевую задачу (1) – (6), определяющую математическую модель процесса переноса тепла по сетевому носителю Γ.

Замечание 1. Для упрощения приводимых ниже математических преобразований используется однородные краевые условия Дирихле (5), (6), то есть краевые условия первого рода, переход к условиям второго и третьего рода не представляет трудностей.

Разрешимость задачи (1) – (6)

Предварительно введем необходимые понятия, определения и утверждения, используемые в дальнейших рассуждениях (см. работы [7, 8]):

Γ_0 – множество точек графа Γ, не включающее граничных точек всех ребер,

$\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$ – область изменения пространственной переменной $x \in \Gamma_0$ и временной переменной $t \in (0,T)$ ($T < \infty$ – заданная постоянная),

$\partial\Gamma$ – совокупность всех узлов ζ графа Γ, являющихся граничными узлами,

$L_p(\Gamma)$, $(p=1,2)$ – полное гильбертово пространство функций с носителем на Γ_0, интегрируемых с p-й степенью (пространства $L_p(\Gamma_T)$ определяются по аналогии),

$W_2^1(\Gamma)$ – функциональное пространство соболевского типа, элементы $u(x)$ которого принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$, их обобщенные производные $u_x(x)$ также принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$,

$W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ – функциональное пространство соболевского типа, элементы $u(x,t)$ которого принадлежат пространству $L_2(\Gamma_T)$, их обобщенные производные $u_x(x,t)$ также принадлежат пространству $L_2(\Gamma_T)$,

$V_2(\Gamma_T)$ – совокупность всех элементов $u(x,\mathrm{t}) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму, определенную соотношением

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \le t \le T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma)} \tag{7}$$

и таких, что при $\Delta t \to 0$, выражение $\|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$ равномерно стремится к нулю для всех $x \in [0,T]$, то есть функции $u(x,\mathrm{t}) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ непрерывны по t в $L_2(\Gamma)$, символом $f(\cdot)_\gamma$ обозначена часть (сужение) функции $f(\cdot)$, определенная на ребре γ, во всех рассуждениях используется классическое понятие интеграла Лебега на графе [9].

Для параболической системы (1) – (3) потребуется введение пространство ее состояний и необходимых для анализа вспомогательных пространств. Для этого относительно элементов $\mu(x)$ и $\nu(x)$, принадлежащих пространству $W_2^1(\Gamma)$, рассмотрим функционал:

$$\ell(\mu,\nu) = \int_\Gamma \left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x) \right) dx$$

где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ заданы, ограничены на множестве Γ_0 и принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$.

Лемма. Пусть выполнены следующие условия: $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ и $\ell(u,\eta) - \int_\Gamma f(x)\eta(x)dx = 0$ для произвольной функции $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x) \in L_2(\Gamma)$ – заданная функция). Тогда для произвольного ребра $\gamma \subset \Gamma$ функция $a(x)_\gamma \dfrac{du(x)_\gamma}{dx}$ является непрерывной на концах этого ребра (непрерывность на концах ребра понимается односторонней).

Подробное доказательство утверждения леммы и его пояснения на примерах представлено в работе [6] (см. также работы [7, 8]

В силу утверждения леммы введем линейное множество $\Omega_a(\Gamma)$ как совокупность функций $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(\frac{\pi}{2})_\gamma \frac{du(\frac{\pi}{2})_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$$

во внутреннем узле ζ (символами $R(\xi)$ и $r(\xi)$ обозначены наборы ребер γ, которые ориентированы по направлению к внутреннему узлу и от внутреннего узла. Совокупность всех предельных элементов (предел понимается в норме просранства $W_2^1(\Gamma)$) множества $\Omega_a(\Gamma)$ образует пространство $W^1(a,\Gamma)$ соболевского типа. При выполнении условия удовлетворения функциями $u(x)$ из множества $\Omega_a(\Gamma)$ краевому условию Дирихле $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$ мы получаем пространство $W_0^1(a,\Gamma)$. Определим линейное множество $\Omega_a(\Gamma_T)$ по аналогии с определением множества $\Omega_a(\Gamma)$. А именно, множество $\Omega_a(\Gamma_T)$ суть совокупность функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, имеющие следы на сечениях плоскостями $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) области Γ_T, которые (следы) являются элементами пространства $W_0^1(a,\Gamma)$ и при этом во внутреннем узле ξ графа удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(\frac{\pi}{2})_\gamma \frac{\partial u(\frac{\pi}{2},t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x}. \tag{8}$$

Как и при построении пространства $W^1(a,\Gamma)$, совокупность всех предельных элементов множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ (предел понимается в норме (7)) образует пространство $W^1(a,\Gamma)$ соболевского типа $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Построенное пространство $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Введем еще одно подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ как замыкание (разумеется, пределы последовательностей понимаются в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$) множества бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соотношению (8) для произвольного t из отрезка $[0,T]$ (аналогично вводится более узкое пространство $W^1(a,\Gamma_T)$ вводится по аналогии), очевидно включение $W^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Введем понятие слабого решения начально-краевой задачи (1) – (6) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $W^1(a,\Gamma_T)$.

Определение. Слабым решением задачи (1) – (6) называется элемент $u(x,t)$ пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, который как функция удовлетворяет функциональному тождеству:

$$\int_\Gamma u(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} u(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dxdt + \ell_t(u,\eta) = \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx$$

для произвольного t из отрезка $[0,T]$ при произвольной функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$; выражение $\ell_t(y,\eta)$ определено функционалом:

$$\ell_t(y,\eta) = \int_{\Gamma_t} \left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t) \right) dxdt, \quad t \in (0,T].$$

относительно элементов y и η из пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Определение слабого решения $u(x,t)$ задачи (1) – (6) в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$ в точности повторяет представленное выше, при этом пространство $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ заменяется на $W^1(a,\Gamma_T)$.

Ниже представлены утверждения, нами используемые в последующих рассуждениях (доказательства этих утверждений содержатся в работах [6 – 8].

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2(\Gamma)$ и пусть $0<T<\infty$. Тогда начально-краевая задача (1) – (6) слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда слабое решение начально-краевой задачи (1) – (6) единственно в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда слабое решение задачи (1) – (6) непрерывно зависит от любой наперед заданной функции $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$.

Замечание 2. Доказательство теорем 1 – 3 опирается на утверждения аналогичных теорем во вспомогательном пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$.

Замечание 3. Нетрудно убедиться в том, что при условия теоремы 1 гарантируют более сильное утверждение для слабого решения (1) – (6): это решение будет обладать свойством регулярности в области Γ_T.

Аппроксимация дифференциальных операторов задачи (1) – (6) и разностная схема

Введем аппроксимации дифференциальных операторов начально-краевой задачи (1) – (6) и сформируем разностную схему – конечно-разностный аналог для задачи (1) – (6). При этом в силу замечания 3 будем использовать классические разностные отношения для производных гладких функции.

Для замыкания $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]=\left\{(x,t)\in\gamma_k\times[0,\mathrm{T}],\ k=\overline{1,m}\right\}$ области Γ_T построим точечное (дискретное) множество, которое является конечномерным множеством, порождаемое областью $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$ (это множество называется сеткой для области $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$ [1 – 3]):

$$\Gamma_T^h=\left\{\left(x_i^k,t_j\right),\ x_i^k\in\gamma_k,\ i=0,1,...,N;\ j=0,1,...,M;\ k=1,2,...,m\right\},$$

где $x_i^1=ih,\quad x_i^k=\dfrac{\pi}{2}+ih,\ h=\dfrac{\pi}{2N},\ i=\overline{0,N},\ k=\overline{2,m};\ t_j=j\tau,\ \tau=\dfrac{T}{M},\ j=\overline{0,M}$; функции, определенные на сетке Γ_T^h, называются сеточными функциями.

Начально-краевую задачу (1) – (6) перепишем в терминах сеточных функций, с областью определения, каковой является сетка Γ_T^h. Функцию $u(x,t)$ заменим сеточной функцией, которую определим следующим образом: $\left(u_i^j\right)_k=u_k(ih,\,j\tau),\ i=0,1,...,N;$ $j=0,1,...,M;\ k=1,2,...,m$. Сеточные функции для $\varphi(x)$, $a(x)$ определим аналогично: $\left(\varphi_i^j\right)_k=\varphi_k(ih,\,j\tau)$, $(a_i)_k=a^k(ih)$. Производные $\dfrac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial x}\right)$ в задаче (1) – (6) заменим разностными отношениями вида

$$\frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial t} = \frac{\left(u_i^{j+1}\right)_k - \left(u_i^j\right)_k}{\tau}$$

с погрешностью порядка $\mathrm{O}(\tau)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial x}\right) = \frac{(a_{i+1})_k \dfrac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \dfrac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h}$$

с погрешностью порядка $\mathrm{O}(h^2)$, соответственно. В результате для задачи (1) – (6) получим конечно-разностный аналог (разностную схему) на сетке Γ_T^h :

$$\frac{\left(u_i^{j+1}\right)_k - \left(u_i^j\right)_k}{\tau} = \frac{(a_{i+1})_k \dfrac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \dfrac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h} \tag{9}$$

$$(\, i = 0,1,..,\mathrm{N};\;\; j = 0,1,...,\mathrm{M}-1;\;\; k = \overline{1,m}\,)$$

$$\left(u_N^{j+1}\right)_1 = \left(u_0^{j+1}\right)_k,\; (\, j = 0,1,...,\mathrm{M}-1;\;\; k = \overline{2,m}\,) \tag{10}$$

$$\frac{\left(u_N^{j+1}\right)_1 - \left(u_{N-1}^{j+1}\right)_1}{h} = \sum_{k=2}^{m}\alpha_k \frac{\left(u_1^{j+1}\right)_k - \left(u_0^{j+1}\right)_k}{h},\; (\, j = 0,1,...,\mathrm{M}-1;\;\; k = \overline{2,m}\,) \tag{11}$$

$$\left(u_i^0\right)_k = \left(\varphi_i^0\right)_k,\; (\, i = 0,1,...,\mathrm{N};\;\; k = \overline{1,m}\,) \tag{12}$$

$$\left(u_0^{j+1}\right)_1 = 0,\;\; (\, j = 0,1,...,\text{M-1}), \tag{13}$$

$$\left(u_N^{j+1}\right)_k = 0,\; (\, j = 0,1,...,\text{M-1};\;\; k = \overline{2,m}\,) \tag{14}$$

Анализ устойчивости разностной схемы (9) – (14)

Устойчивость разностной схемы означает непрерывную зависимость решения разностной задачи от входных данных (от начальных данных, от правой части и от краевых условий, см. [3, с. 572]) .

Будем говорить, что схема (1) – (6) устойчива по начальным данным, если при достаточно малых $h \le h_0$ и $\tau \le \tau_0$ имеет место неравенство:

$$\max\left\|u(x,t)\right\| \le M\left\|u(x,0)\right\|,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ , через $\|\cdot\|$ обозначена норма пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Для устойчивости схемы (9) – (14) достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\left\|u^{j+1}\right\| \le \left(1+\tau C\right)\left\|u^m\right\|. \tag{15}$$

При доказательстве справедливости условия (15) ограничимся исследованием случая неявной схемы.

Рассмотрим разностное уравнение:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{a}{h^2}\left(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}\right).$$

Обозначим $\theta = \dfrac{\tau a}{h^2}$, тогда имеет место соотношение $u_i^{j+1} - u_i^j = \theta\left(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}\right)$, из которого следует $u_i^{j+1} = u_i^j - \theta\left(2u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}\right)$.

Найдем на слое $(j+1)$ тот узел k_0, в котором u_i^{j+1} принимает наибольшее значение: $\max\limits_i u_i^{j+1} = u_{k_0}^{j+1} \ge u_i^{j+1}$ для любого $i = 0,1,..,\mathrm{N}$, тогда $2u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} \ge 0$ и поэтому выполняется неравенство

$$u_{k_0}^{j+1} \le u_{k_0}^{j} \le \max_i u_i^j. \qquad (16)$$

С другой стороны, найдем на слое $(j+1)$ узел l_0, в котором u_i^{j+1} принимает минимальное значение: $\min\limits_i u_i^{j+1} = u_{l_0}^{j+1} \le u_i^{j+1}$ для любого $i = 0,1,..,\mathrm{N}$, тогда $2u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} \le 0$ и справедливо неравенство

$$u_{l_0}^{j+1} \ge u_{l_0}^{j} \ge \min_i u_i^j. \qquad (17)$$

Объединяя отношения (16) и (17), приходим к неравенству

$$\left\| u^{j+1} \right\| = \max_i \left\| u_i^{j+1} \right\| \le \left\| u^j \right\|,$$

что совпадает с условием (15) при $C = 0$. Таким образом, разностная схема безусловно устойчива по входным данным при любых h и τ.

Алгоритм определения приближенного решения задачи (1) – (6)

Алгоритм решения сформулированной начально-краевой задачи можно представить следующим образом.

1. Разобьём ребро $\gamma_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ точками деления $x_i^1 \in \gamma_1$, $i = 0,1,...,N$, с шагом $h = \frac{\pi}{2n}$; каждое ребро $\gamma_k = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] (k = \overline{2,m})$ разбивается точками деления $x_i^k \in \gamma_k$, $i = 0,1,...,N$, с шагом $h = \frac{\pi}{2n}$; отрезок $[0,\mathrm{T}]$ получает точки деления $t_j = j\tau$, $j = \overline{0,M}$ с шагом $\tau = \frac{T}{M}$. Тем самым строится сетка области $\Gamma \times [0,\mathrm{T}] = \left\{(x,t) \in \gamma_k \times [0,\mathrm{T}],\ k = \overline{1,m}\right\}$, которая выше обозначена через Γ_T^h.

2. Устанавливаем аппроксимацию дифференциальной системы (1) – (6), используя разностные отношения для производных и учитывая аппроксимацию соотношений в условиях согласования – в результате получаем разностную схему (9) – (14), представляющую собой систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой определяется числом ребер графа, количеством точек деления на каждом ребре и числом соотношений в условиях согласования. Разностная схема, представленная соотношениями (9) – (14), является аналогом консервативной неявной схемой [2, 3].

3. Матрица алгебраической системы (9) – (14) является блочной и содержит m блоков по числу ребер графа. Условия согласования (11), (12) устанавливают связи между блоками (в виде связей между определенными элементами блоков). Каждый матричный блок соответствует классической разностной схеме параболического уравнения на отрезке, соответствующему фиксированному ребру графа.

4. Определяется решение $\{u_i^{j+1}\}$ алгебраической системы (9) – (14) (решением является совокупность значений переменных u_i^{j+1}, относящихся к $(j+1)$ слою) через известные значения переменных $\{u_i^j\}$, относящихся к j слою. Значения $\left(u_i^0\right)_k$ на

нулевом слое определяются значениями сеточной функции $\left(\varphi_i^j\right)_k$ начальной функции $\varphi(x)$ из соотношений (12).

5. Граничные условия (13), (14) определяют элементы матрицы системы, в граничных столбцах каждого блока.

Замечание 4. Как и в классическом случае численного решения начально-краевой задачи для параболического уравнения на отрезке, разностная схема (9) – (14) является безусловно устойчивой.

Пример численного решения с анализом погрешности решения

Рассмотрим граф-звезда Γ с внутренним узлом ξ и тремя ребрами ($m=3$): Г=$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Ребро γ_1 параметризовано отрезком $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ребра γ_2,γ_3 параметризованы отрезком $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Тестовая задача для определения функции $u(x,t)$ изменения температуры в области $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$ имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial x}\right), \tag{20}$$

$$u\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_1}=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_2}=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)_{\gamma_3}, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_1}=\alpha_1\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_2}+\alpha_2\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_3}, \tag{22}$$

$$u(x,0)_{\gamma_k}=\varphi(x),\ k=\overline{1,3}, \tag{23}$$

$$u(0,t)_{\gamma_1}=0,\ t\in\left[0,\mathrm{T}\right], \tag{24}$$

$$u(\pi,t)_{\gamma_k}=0\ \ (k=2,3),\ \ t\in\left[0,\mathrm{T}\right]. \tag{25}$$

Построим конечно-разностный аналог для задачи (20) – (25) на сетке Γ_T^h области $\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$:

$$\frac{\left(u_i^{j+1}\right)_k-\left(u_i^j\right)_k}{\tau}=\frac{\left(u_{i+1}^{j+1}\right)_k-2\left(u_i^{j+1}\right)_k+\left(u_{i-1}^{j+1}\right)_k}{h^2},\ k=1,2,3, \tag{26}$$

$$\left(u_N^{j+1}\right)_1=\left(u_0^{j+1}\right)_2=\left(u_0^{j+1}\right)_3, \tag{27}$$

$$\frac{\left(u_N^{j+1}\right)_1-\left(u_{N-1}^{j+1}\right)_1}{h}=\alpha_1\frac{\left(u_1^{j+1}\right)_2-\left(u_0^{j+1}\right)_2}{h}+\alpha_2\frac{\left(u_1^{j+1}\right)_3-\left(u_0^{j+1}\right)_3}{h}, \tag{28}$$

$$\left(u_i^0\right)_{\gamma_k}=\left(\varphi_i^0\right)_{\gamma_k},\ \ k=1,2,3, \tag{29}$$

$$\left(u_0^{j+1}\right)_{\gamma_1}=0, \tag{30}$$

$$\left(u_N^{j+1}\right)_{\gamma_k}=0,\ k=2,3. \tag{31}$$

Здесь разностное уравнение (27), (28) будет аппроксимировать условий согласования (21), (22) с погрешностью $O(h)$. Таким образом, погрешность аппроксимации начально-краевой задачи будет равна $O(\tau+h)$. При этом погрешность аппроксимации во внутренних точках ребер равна $O(\tau + h^2)$, погрешность аппроксимации в узле равна $O(\tau + h)$, а аппроксимация в граничных узлах – точная.

Распределение температур $u(x,t)$ показано в двух случаях: симметричный случай и асимметричный случай.

Симметричный случай: рассматриваемая задача имеет следующие исходные данные: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $h = 0{,}1571$, $\tau = 0{,}1$. Симметричное начальное распределение температур $\varphi(x) = \sin(x)$. Численные расчеты поля распределения температур по пространственной переменной x, изменяющейся на ребрах $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для временных значений t приведены в таблицах 1 (значения $u(x,t)$ на ребре γ_1) и 2 (значения $u(x,t)$ на ребрах γ_2, γ_3).

Таблица 1.
Table 1.

t=0.1	0	0.309017	0.587785	0.809017	0.951057	1
t=0.2	0	0.280492	0.532972	0.731588	0.853986	0.586964
t=0.3	0	0.253998	0.48197	0.659837	0.767234	0.526427
t=0.4	0	0.229539	0.435062	0.594537	0.689958	0.473124
t=0.5	0	0.20714	0.392298	0.535503	0.620825	0.425607
t=0.6	0	0.186758	0.353522	0.482259	0.558799	0.383037
t=0.7	0	0.16829	0.31847	0.434281	0.50306	0.344806
t=0.8	0	0.151601	0.286838	0.391064	0.452926	0.310432
t=0.9	0	0.136542	0.25832	0.352141	0.40781	0.279504
t=1	0	0.122966	0.232623	0.31709	0.3672	0.251668
$\gamma_1 : x$	0	0.3142	0.6284	0.9426	1.2568	1.571

Таблица 2.
Table 2.

t=0.1	1	0.951057	0.809017	0.587785	0.309017	0
t=0.2	0.586964	0.853986	0.731588	0.532972	0.280492	0
t=0.3	0.526427	0.767234	0.659837	0.48197	0.253998	0
t=0.4	0.473124	0.689958	0.594537	0.435062	0.229539	0
t=0.5	0.425607	0.620825	0.535503	0.392298	0.20714	0
t=0.6	0.383037	0.558799	0.482259	0.353522	0.186758	0
t=0.7	0.344806	0.50306	0.434281	0.31847	0.16829	0
t=0.8	0.310432	0.452926	0.391064	0.286838	0.151601	0
t=0.9	0.279504	0.40781	0.352141	0.25832	0.136542	0
t=1	0.251668	0.3672	0.31709	0.232623	0.122966	0
$\gamma_2, \gamma_3 : x$	1.571	1.8852	2.1994	2.5136	2.8278	3.142

Асимметричный случай: рассматриваемая задача имеет следующие исходные данные: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $h = 0{,}1571$, $\tau = 0{,}1$. Асимметричное начальное распределение температур:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin(x), x\in\gamma_1\\ (\pi-x)\sin(x), x\in\gamma_2\\ x\sin(x), x\in\gamma_3\end{cases}$$

Численные расчеты поля распределения температур по пространственной переменной x, изменяющейся на ребрах $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ для временных значений t приведены в таблицах 3 (значения $u(x,t)$ на ребре γ_1), 4 (значения $u(x,t)$ на ребре γ_2) и 5 (значения $u(x,t)$ на ребре γ_3).

Таблица 3.
Table 3.

t=0.1	0	0.485403	0.923291	1.270801	1.493916	1.570796
t=0.2	0	0.438778	0.83165	1.134107	1.301052	0.830565
t=0.3	0	0.393632	0.742795	1.004432	1.138513	0.72732
t=0.4	0	0.351086	0.66034	0.888602	1.003387	0.645998
t=0.5	0	0.312143	0.586072	0.787199	0.889123	0.577673
t=0.6	0	0.277231	0.520251	0.698822	0.790962	0.518379
t=0.7	0	0.246309	0.462341	0.621701	0.70563	0.466021
t=0.8	0	0.219077	0.411502	0.554182	0.630809	0.419352
t=0.9	0	0.195136	0.366843	0.494849	0.564795	0.37754
t=1	0	0.174073	0.327532	0.442519	0.506283	0.339976
$\gamma_1 : x$	0	0.3142	0.6284	0.9426	1.2568	1.571

Таблица 4.
Table 4.

t=0.1	1.570796	1.195133	0.762481	0.369316	0.097081	0
t=0.2	0.830565	1.061805	0.754403	0.436042	0.180032	0
t=0.3	0.72732	0.954129	0.722713	0.458584	0.214014	0
t=0.4	0.645998	0.864629	0.680734	0.454781	0.22347	0
t=0.5	0.577673	0.786028	0.634373	0.436695	0.220298	0
t=0.6	0.518379	0.714891	0.586703	0.411386	0.210651	0
t=0.7	0.466021	0.649711	0.539545	0.382868	0.197848	0
t=0.8	0.419352	0.58979	0.494024	0.353429	0.183725	0
t=0.9	0.37754	0.53474	0.450815	0.324385	0.169313	0
t=1	0.339976	0.484277	0.410294	0.296481	0.155197	0
$\gamma_2 : x$	1.571	1.8852	2.1994	2.5136	2.8278	3.142

Таблица 5.
Table 5.

t=0.1	1.570796	1.792699	1.779121	1.477265	0.873725	0
t=0.2	0.830565	1.621069	1.543948	1.238339	0.70116	0
t=0.3	0.72732	1.44091	1.344517	1.05347	0.583255	0
t=0.4	0.645998	1.268946	1.171663	0.905397	0.495228	0
t=0.5	0.577673	1.11369	1.021711	0.783129	0.425446	0
t=0.6	0.518379	0.976958	0.891987	0.680216	0.368053	0
t=0.7	0.466021	0.857801	0.779966	0.592648	0.319838	0
t=0.8	0.419352	0.754348	0.683264	0.517671	0.278845	0
t=0.9	0.37754	0.664572	0.599722	0.45322	0.243749	0
t=1	0.339976	0.586575	0.527442	0.397656	0.213571	0
$\gamma_3 : x$	1.571	1.8852	2.1994	2.5136	2.8278	3.142

Заключение

Предложенные в работе методы анализа начально-краевой задачи (1) – (6) основаны на развитии классических подходов вычислительной математики, которые используют методы исследования, базирующиеся на редукции задачи (1) – (6) к конечномерной системе алгебраических уравнений (9) – (14). Отличительной особенностью представленных результатов является присутствие в математическом описании задачи (1) – (6) условий согласования (2), (3), существенно усложняющих анализ конечномерного аналога (разностной схемы (9) – (14)). В работе указаны условия безусловной устойчивости разностной схемы, т. е. непрерывной зависимости приближенного решения от исходных данных в метрике выбранного пространства сеточных функций. Следует отметить, что представленное исследование открывает путь анализа и нахождения приближенных решений для математических моделей волновых процессов [9 – 12], а также при исследовании начально-краевых задач с многомерной пространственной переменной: $x \in \Re^n$, $n \geq 2$ [13 – 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Провоторов В.В. Разностные схемы граничных задач на графе. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2009;5(10):14-18.
2. Провоторов В.В. Разностная схема для параболического уравнения с распределенными параметрами на графе. *Системы управления и информационные технологии*. 2014;55.(1.1):187-190.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Изд. 5-е. – М. Наука. 1977. – 736 с.
4. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S., The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Procedia Computer Sciense*. 2017;103:324-330.
5. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control transference processes in spatial networks. *International Scientific Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering»* MIP: Engineering-2019. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 042025. DOI: 10.1088/1757-899X/537/4/042025.

6. Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017;13(2):209-224.
7. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;15(2):187-198. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.203 (accessed 18/06/2021).
8. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;15(3):323-336. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.303 (accessed 18/06/2021).
9. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Part A.A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;14(1):107-117. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.2003 (accessed 18/06/2021).
10. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010;(2):60-69.
11. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;1.2(31):272-277.
12. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;32(2.2):293-297.
13. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2017;13(4):431-443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 18/06/2021).
14. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of nonisothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics*. Conference Series, 2019, 1203, Article ID 012094. Available at: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094 (accessed 18/06/2021).
15. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2017;13(4):431-443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 18/06/2021).

REFERENCES

1. Provotorov V.V. Raznostnye skhemy granichnykh zadach na grafe // *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2009;5(10):14-18. (In Russ)
2. Provotorov V.V. Raznostnaya skhema dlya parabolicheskogo uravneniya s raspredelennymi parametrami na grafe. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2014;55.(1.1):187-190. (In Russ)
3. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Izd. 5-e. – M. Nauka. 1977. – 736 s. (In Russ)

4. Podvalny S.L., Provotorov V.V., Podvalny E.S., The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph. *Procedia Computer Sciense*. 2017;103:324-330.
5. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control transference processes in spatial networks. *International Scientific Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering»* MIP: Engineering-2019. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 042025. DOI: 10.1088/1757-899X/537/4/042025.
6. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniya parabolicheskoi sistemy s zapazdyvaniem i raspredelennymi parametrami na grafe // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya. 2017;13(2):209-224. (In Russ)
7. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;15(2):187-198. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.203 (accessed 18/06/2021).
8. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processe. 2019;15(3):323-336. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.303 (accessed 18/06/2021).
9. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Part A.A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;14(1):107-117. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.2003 (accessed 18/06/2021).
10. Provotorov V.V. Metod momentov v zadache gasheniya kolebanii differentsial'noi sistemy na grafe. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya. 2010;(2):60-69. (In Russ)
11. Provotorov V.V. Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov sistemy «machta-rastyazhkI». *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2008;1.2(31):272-277. (In Russ)
12. Provotorov V.V. K voprosu postroeniya granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy «machta-rastyazhkI». *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2008;32(2.2):293-297. (In Russ)
13. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2017;13(4):431-443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 18/06/2021).
14. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics*. Conference Series, 2019, vol. 1203, Article ID 012094. Available at: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094 (accessed 18/06/2021).
15. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University*. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2017;13(4):431-443. Available at: https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2017.409 (accessed 18/06/2021).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Тран Зуй, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: tranduysp94@gmail.com

Tran Duy, Graduate Student, Department Of Equations In Partial Derivatives And Probability Theory, Faculty Of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

Провоторов Вячеслав Васильевич, профессор, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: 0000-0001-8761-7174

Provotorov Vyacheslav Vasil'evich, Voronezh State University, Professor, Dr. Sci. In Physics And Mathematics, Associate Professor, Voronezh, Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 14.07.2021; одобрена после рецензирования 16.09.2021; принята к публикации 23.09.2021.

The article was submitted 14.07.2021; approved after reviewing 16.09.2021; accepted for publication 23.09.2021.